空間・時間・物質

Raum, Zeit, Materie

Math & Science

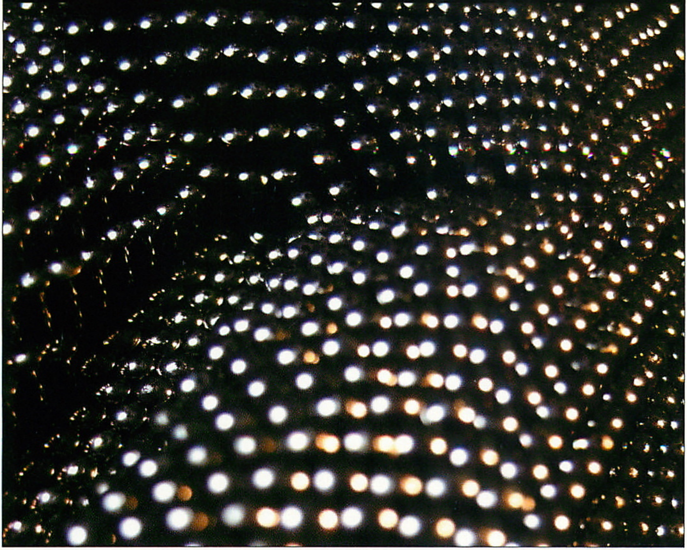
下

ヘルマン・ワイル

Hermann Weyl

内山龍雄◎訳

Ryoyu Uchiyama



ちくま学芸文庫

ちくま学芸文庫

空間・時間・物質 下

ヘルマン・ワイル
内山龍雄 訳

筑摩書房

Raum · Zeit · Materie

Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie

von Hermann Weyl

Julius Springer, 1923

目　次

注意：数式番号は各章ごとに（1）からはじめてその章の終わりまで通し番号をつけた．文中，式の番号が引用された場合，特に注意がないかぎり，それは同じ章の式の番号を示すものとする．

上巻目次

空間・時間・物質　下

第IV章　一般相対性理論

§ 29　運動の相対性．計量場と重力 [1]

前章に述べたアインシュタインの相対性原理が，われわれの経験から導かれた自然法則，またこの世界における作用的関係を正確に表現している自然法則に，いかに忠実に従っているとはいえ，なおそれにはひとつの大きな困難がある．この困難のために，われわれはこの相対性原理に満足するわけにはいかない．ある物体の他の物体に対する相対的運動だけが意味のある問題であるということを，われわれは多くの証拠とともに知っている．ひとつの剛体の種々の可能な運動状態のあいだにはなんらの絶対的差違も存在しない．ここでもう一度，前章の最初の議論にたちもどり，しばらくの間，同時刻の相対性を再び度外視することにしよう．いま二つの物理的過程があり，その一方の過程の状態量を表わす時空座標の関数が，**運動群に属するひとつの変換**[1]によってもうひとつの過程を記述する時空座標の関数に移されるとき，この二つの過程の間には客観的ななん

1)　訳者注：本書上巻 317-318 ページ参照．

らの差違も存在しない．したがってひとつの時空座標系を基準として求められた自然法則は，他の座標系〔訳者注：ただし運動群に属する変換によってもとの座標系から導くことのできるもの〕を基準としてもまったく同じ形を持つべきであると要請してよかろう．しかし力学的経験はこの要請に矛盾しているように思われる．そこで，上の要請に対立する力学的事実に強制されて，ニュートン以来，並進運動は別として，回転運動については，それに絶対的な意味を賦与しようとわれわれは考えた．しかしわれわれの理性は現実から強く要求されているこの難問題を，上のような考え方によっては決して正しく理解することはできなかった．(上の考えに対するあらゆる哲学的弁明にもかかわらず，それはわれわれの理性には納得しかねた．このような試みの例としてたとえばカントの“自然科学の形而上学的基礎”がある)．そして遠心力の問題は，解決のむずかしい謎としていつも受けとられた [2]．この問題についてわれわれは，もう少し詳しく考えてみよう．

ガリレイの慣性の法則の主張することは，この世界にはひとつの強制的な摂理が存在し，世界の中で，任意にあるきまった方向に向かって投げ出された物体（つまり初速度があたえられた物体）に対して，この摂理はひとつのきまった，ある自然な運動を強制する．この特別な運動から抜け出すことができるのはただ外力がこの物体に作用している場合に限るということである．この特別な運動は物体のいる位置からつぎの位置へ，無限小ではあるが，常に作用

している一種の“持続性”[2)]によって引きおこされる．この“持続性”とは，任意の1点Pにある物体の運動を示す世界方向（Weltrichtung）$\boldsymbol{r}$を，Pにごく近接しており，Pから$\boldsymbol{r}$の方向にある点P′まで$\boldsymbol{r}$自身に平行に移すという性質（傾向）のことである．ここで，慣性の法則にいい表わされている事実をさらに一歩進めて，“慣性場”[3)]が存在し，それは各物体の世界方向に対して，それ自身への無限小平行移動を規定するばかりでなく，さらに，任意の1点Pに在るすべてのベクトルに対しても，PからPに近接したすべての点までの，これらのベクトルの平行移動を規定すると仮定しよう．これによって第II章に述べた無限小幾何学との関連を得たことになる．ここにいう“慣性場”とは第II章で，アフィン接続という数学的名前で呼んだものと同じものであることがわかる．自由な質点の世界線はひ

---

2)　訳者注：物体の“状態”をいつまでも保持しようとする性癖（原語はBeharrungstendenz）のこと．慣性，または惰性と同意語である．

3)　訳者注：空間の各点において，そこにある物体の運動に対して，外力がないとき，ここにいう特別な運動（これは，慣性系からみれば，また重力も働いていないときは等速直線運動のことである）を強制する至上命令を一種の場の作用と考え，これを原著では“Führungsfeld”と名づけている．しかし適当な訳語がないから，これを本書では“慣性場”と訳すことにした．したがって物体に他の力がはたらいていないときは，この慣性場のために，“物体は特別な運動”を行なうことになる．なお重力場は実はこの慣性場にほかならないことが後に説明される．したがって重力だけの影響による物体の自然落下はまさにこの“特別な運動”にほかならない．

とつの測地線である．議論を解析的に進めることができるように，世界点の属する 4 次元連続体になんらかの方法で 4 次元座標 x^i をもちこめば，任意の測地線は，（この曲線で示される運動の種々の段階を指示するのに）適当なパラメーター s（固有時間）を用いると，微分方程式

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0 \qquad (1)$$

を満足する．ここで任意の運動をしている物体を基準物体にとり，この上の点の位置を x^1, x^2, x^3（空間座標），この物体上に固定した時計の読みが x^0 であると考えてよい．ところでベクトルの無限小平行移動に対して確立されたただひとつの要請はつぎのことである．ある座標系が任意の 1 点 P において測地的な場合には，この座標系を基準にとるとき，P における任意のベクトルの成分は無限小平行移動に際して，その値が変わらない，あるいは点 P における接続係数 $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ のすべての成分がみな 0 となるということである．このことをいまのわれわれの言葉でいいあらわせば，上述の点 P の近傍においてある特別な，つぎのような基準物体を選定することが必ずできるということになる．すなわちこの基準物体から眺めたとき，そこを通過する自由質点（つまり外力の作用をうけてない粒子）は一定の速度をもって直線運動をするように見受けられるということである．あるいは簡単にいえば，“慣性場”がガリレイ的であるような，基準物体が必ず存在するということである．ガリレイの慣性の法則の基礎となっているわれわれの経験に

よれば，世界の中にある“慣性場”に対する上述のような要請はまことに当然であるように思われる．しかしもし任意の基準物体（たとえば地球）を基礎にとれば，換言すれば，任意の座標系においては，質点のこの座標系に相対的な運動はガリレイの慣性の法則に従わない．むしろひとつの外力によって，その運動が一様な並進運動からずれている場合と同様なふるまいをしているように見受けられる．質点に働く単位質量あたりのこの“慣性力”の成分は（1）によってあたえられる：それは

$$-\Gamma^i_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$$

である．ここでベクトル $u^i=\dfrac{dx^i}{ds}$ は質点の運動方向を示す世界ベクトル（つまり世界方向）である．ひとつの物体に働く慣性力（遠心力やコリオリの力）は明らかにその質量に比例する．しかし上の公式はさらに慣性力が物体の速度にどのように依存するかをも示している．

ひとつの物体の現実の運動は 2 種の作用の間の戦いによって引きおこされる．すなわち，その一方は“**慣性場**”で，これは世界のなかにおける物体の運動方向を，刻々それ自身に平行に移そうとする作用をもつ．もう一方は**力**で，これは物体をその慣性的な運動から偏向させるものである．いまたとえば汽車の衝突事故を考えよう．その場合，列車の通過した線路の傍に立っている教会からみたときの汽車のもっていた運動の衝撃（運動量のこと）と同じぐらいの大きさの衝撃を，汽車から眺めた場合に，教会自身が持っていたのに，汽車は粉々に破壊され，教会はそのままであ

るのは何故かと誰かが質問したとしよう．これに対する解答はまったく簡単である．なんとなれば汽車は，衝突のさい活動をはじめた分子力によって，その“慣性場”によりきめられていた自然の運動から引きはなされたが，教会はそうはならなかったからである．われわれはこの事情を微細な点まで明らかにすることができる．もしわれわれがこの世界を構造をもたない多様体と考えるならば，運動の相対性についての原理と，慣性力の存在の間には矛盾が生まれることにわれわれは気づくであろう．しかし世界はひとつの“慣性場”，つまりひとつのアフィン接続の場をあたえられていることを考慮すれば，この矛盾はたちどころに消滅する．あるいはむしろ，つぎのような考えの中に，この問題の核心を発見することができよう．すなわちある力学的過程に，“慣性場”（または慣性力）が，真の力と拮抗する能力として，また場合によっては強い影響力をもったひとつの能力として登場するとき，われわれはこの慣性場をひとつの本物の力（たとえば，電磁場のような現実の場の一種）とみなさねばならないという考えである．さらにまたあらかじめ与えられた4次元世界，そのなかにある物質やその状態に無関係な世界，このような世界は，ニュートン力学や，特殊相対性理論においては採用されているが，そのような形式的な，先験的に与えられた世界は現実には存在することは不可能であり，むしろ現実の世界は物質からの作用を受け，またその構造は物質によって規定され，物質の状態の変化につれて世界も変化するという考えが，

上述の矛盾を解決してくれる．この考えは電場が電荷によって生み出され，電荷とともに変化するという事情とよく似ている．このようにしてわれわれは必然的に，世界に対するリーマンの力学的考え方に到達する．

ところで現実の自然においては，慣性場がある世界点から他の点に移るときそれに応じて変化し，また物質によっても場の様子が影響をこうむるという徴候が存在するだろうか？――あるきまった基準物体を基礎にとったとき（つまりある特定の座標系において），そこに登場する慣性力にとって，つぎのような互いに密接に関連した二つの事情は特徴的なことである．第一は，運動する物体に働く慣性力は，その物体の慣性質量に比例するということである．第二は，ひとつの適当に設けられた座標系を基準にとれば，慣性力は消滅する．しかし，ここに述べた二つの事情は，重力に対しても同じようになりたつことを，われわれは経験的に知っている．ひとつの与えられた重力場は，この場の中に持ちこまれた任意の質量の物体に，常に同じ加速度をあたえるという事実こそ，重力の本来の謎の根源である．静電場では，小さい電荷をもった試験物体には力 $e\boldsymbol{E}$ がはたらく．ここで電荷 e は試験物体のみに依存し，電場の強さ $\boldsymbol{E}$ は，そこにある場だけによってきまる．もしほかの力がはたらいていなければ，上述の電気的力は質量 m のこの試験物体に加速度 $\boldsymbol{b}$ を引きおこす．この $\boldsymbol{b}$ は力学の基礎方程式 $m\boldsymbol{b}=e\boldsymbol{E}$ によってきまる．重力場の場合にも事情はよく似ている．試験物体に働く重力は $=g\boldsymbol{G}$，ここで g

は試験物体のもつ重量（Gravitationsladung）を示し，$\boldsymbol{G}$ は重力場だけによる重力場の強さを示す．そこで試験物体のもらう加速度は，$m\boldsymbol{b}=g\boldsymbol{G}$ によりきまる．ところで，つぎのような注目すべき事実が明らかにされた．すなわち**重量あるいは重力質量**（schwere Masse）g **は慣性質量**（träge Masse）m **に等しいという事実**である．エトヴェシュ [3] によって，最近この法則が最高の精度で，実験的に証明された．地球の表面上にある物体には地球の回転のために遠心力が作用し，それはこの物体の慣性質量に比例する．またこれに働く重力はその重力質量に比例する．これら両種の力の合力が見かけの重力である．もし重力質量と慣性質量の間の比例関係が物質ごとに異なるとすれば，物質が異なるごとにそれに働く見かけの重力の方向も異なるはずである．エトヴェシュは，最も敏感な装置，つまりねじれ秤を用いて，このような**物質による方向のちがいが存在しない**ことを確かめた．この結果，精密な秤を用いて物体の重量を測るときの精度と同じ精度で，その慣性質量も測れることになる．重力質量と慣性質量の比例することは，昔からの意味で，物質が失われた結果その質量が減少する場合はもちろん，さらに放射線によるエネルギーの損失の場合にも，この比例関係がなりたつ．——すでに述べたように，重力は上に述べた二つの特別な事情のうちの第二の特徴をも満足している．すなわち時空内の 1 点において適当な座標系を導入すれば，それを基準にしたとき，その点の近傍の重力は消失する．たとえば，ひとつの閉じた箱，あるい

はエレベーターを考えよう．いまエレベーターをつるしているロープが切断され，箱は摩擦なしに地球の重力の作用のもとに自然落下するとすれば，この箱はまさに上述のような特別な基準座標系のひとつの直観的な例である．すべての自由落下する物体は，この箱の中で眺めれば，静止しているように見える．箱のなかにも重力が作用しているにもかかわらず，この箱は静止しており，そこには重力が何も存在しないかのように，すべての物体はふるまう（“**等価原理**”）．

この例からわかるように，重力場内における物体の運動は，重力を慣性力，あるいは慣性場と区別することに対してなんらの物理学的根拠をも与えない．そこでわれわれはつぎのような仮定に到達する．すなわち重力は，慣性と不可分なもので，それは物体の運動をそのまま持続させようとする“慣性場”の独特な傾向の中に含まれており，慣性場によって指示された自然な運動から物体を逸脱させようとする力とは別種のものであるという仮定である．この考えにしたがえば，力学現象の説明にとって慣性のほかに，さらに，このような意味の“重力”を導入することは余計なことになる．上の解釈は重力の謎を一挙に解決してくれる．またなぜ，重力質量と慣性質量が等しいかという質問に対しても解答を与えてくれる．さらに，慣性場（つまりアフィン場）が時空内にある物質と相互作用し，その結果時間的にも，空間的にも変化するべきであるという前に述べた要請も満たされることが，上の仮定を容認すれば，容

易にわかる．**慣性場に対する物質からの影響は重力の現象として現われる**．これこそアインシュタインの新しい重力理論の核心である．この意味は，歴史的意義の大きいつぎのような比喩によってもっとわかりやすくなるであろう．昔は，空間の中には“上下”というひとつの絶対的な方向が存在すると考えられた．物体が落下するさいの現実の方向は，この絶対的方向と，物質の影響（たとえば，デモクリトスの考えた原子による衝突）によるこの絶対方向からの偏向の組み合わせできまるものとされていた．しかしその後，この考えはまちがっており，物体の落下方向について，絶対方向と物質の影響によるそれからのズレというように分離して扱うべきではないことを知った．むしろ，これらは一括してすべて地球の引力による物質的作用として落下方向を総括的に考えるべきことを学んだ．また空間それ自身としては，その中におけるすべての方向はまったく同等であり，先験的な絶対方向などはあり得ないと考えるようになった．これと同じように，ガリレイ－ニュートンの教えにしたがって昔は，この世界には一様な慣性場が存在するものと考えた．それはこの世界に先験的に与えられたもので，世界の形式的，幾何学的構造を示すものとみなされた．またこの一様な場からのズレが重力であり，このズレだけが物質によって規定されるものと考えられた．しかしアインシュタインによれば，一様な慣性場と，それからのズレというように分離すべきでなく，これらは不可分なひとつの場として扱われるべきものである．またこの世

界では，すべての運動状態はまったく同格である．しかしこの観点を遂行するためには，単に，重力として知られた，慣性場の小さな変動ばかりでなく，慣性場が全体として，物質にその基礎をおいている必要がある．この要求は，慣性場と，物質やその他の物理的状態量（たとえば電磁場の状態を記述する量）の間の相互作用を規定する法則が，基礎にとる座標系のえらびかたに依存してはならないことを主張することになる〔訳者注：慣性場が大体一様で，そこからのわずかなズレが重力であるというような主張は，いまのわれわれの知識からみれば，座標系のとりかたに依存した主張である．背景となっている一様な慣性場も，座標系をかえれば一様でなくなり，それからのズレである重力とも複雑にいりまじり，そのような区別は不可能となる．したがってこのような分離をやめ，慣性場はつねに，全体として物質と結びつくと考えるならば，特に測地的な座標系にこだわる必要はなく，したがって物質と慣性場との結合の法則はいかなる座標系をもとにしてもなりたつべきことになる〕．つまり慣性場と物質との相互作用の法則は世界座標の**任意**の連続変換に対して不変でなければならない（“**一般相対性原理**”）．

ここで法則がわれわれの用いる基準物体の運動状態に無関係ということを，座標系の任意の選択に無関係という形に解釈の拡張をしたことについて，読者は恐らく抵抗を感ずるであろう．もともと運動群の変換は一般に時間座標に関して非線形であり，その変換に登場する時間の関数は任

意の連続関数でかまわない．一方，特殊相対性理論により，それ以前のような時間座標の特別な意義（役目）というものはまったく影の薄いものとなった．また従来，空間座標の基盤となった，わずかな自由度をもつ剛体という描像も，思考上においてもその存在があやしくなった．そこで運動群に登場する関数を単に時間座標の任意関数に限る根拠は失われたと考えられる．したがってわれわれに残されたものといえば，4 個の世界座標の任意の連続変換だけである．ここにおいて物理学とは無関係な古い意味の幾何学はこの世界には存在しえないことになる．また“剛体の基準物体”というものは今までは自然記述の“支え”となっていたが世界の構造が特別にえらばれた座標系によるのではなく，むしろ世界の状態を示す場（アフィン接続の場とか計量場）によって表現されるべきことを悟った現在では，そのような“支え”も捨て去ることができる．測定によって与えられるものは物理学的状態量の値であって座標ではない．座標はむしろわれわれが勝手に各世界点に割りふるものである．それは世界のなかに分布している状態量を数学的な関数として表わすことができるように，われわれが勝手に用いた標識にすぎない．いまわれわれによって採択された一般相対性の観点こそ，“世界の物質的内容に対して，空間と時間はそれの現象の形式である”という事情に正しく適合した最初のものであると主張することが許されるであろう．

物質がどのように慣性場を規定するかを示す法則，いいかえると，アインシュタインの理論において，ニュートン

の万有引力の法則の代役をつとめる法則を見つけるのには，既にわれわれが知っている場の法則（マックスウェルの理論）は何のたすけにもならない．それにもかかわらず，アインシュタインは，誰にも納得のいく方法でこの問題を解決した．さらにその法則を用いて，惑星の運動を，ニュートンの理論と同じように説明できることを示した．惑星系は，ニュートンの理論の主張に反して，たとえば水星の場合に，その近日点は 100 年の間におよそ 43″ だけ前進する．これはいままでの理論では満足のいくように説明のできなかった点であるが，これさえも，アインシュタインの重力論は量的に正しく説明することに成功した．

以前には，遠心力は現実の力か，それともそれは見かけの力，つまり単に計算上でてくるものにすぎないものかという質問について，しばしば議論された．アインシュタインの観点からの当然の帰結として，われわれは重力と慣性力を統合した．したがって上の質問に対するわれわれの答はつぎのようなものである：個々の世界点において，つぎのようなひとつの特別な座標系を導入することが常に可能であるという限りにおいて，慣性力は見かけの力である．その座標系とは，それを基準にしたとき，その世界点で慣性場がガリレイ的になるような座標系（つまりその世界点における測地座標系のこと）のことである：しかし世界の中のある有限にひろがった領域全体にわたり上述のような性質をもった座標系を設けることは一般には不可能であるから，それは現実の力（重力）である（たとえば墜落しつ

つあるエレベーターの中から眺めれば，その近所には重力は存在しない，しかし地球の反対側に眼を向ければ，そこには重力がある．したがって地球全体の重力が消失したように見えるひとつの座標系を設けることはできない)．

いままで慣性場，すなわちアフィン接続の場が，この世界のより基本的な性質，つまり世界の計量にその基礎を置いているということに考慮を払うことなしに，アインシュタインの重力論の基本的な考えかたについて述べてきた．しかし物さしと時計はひとつの計量場が存在していることをわれわれに示している．無限に短い周期をもつ，同じ構造をもつ時計のひとつが世界点 O を通過するとき，O から数えてこの時計が 1 周期すすむあいだに，それが時間的ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(dx^i)$ を経過するとすれば，このベクトルの“大きさ”は，どの時計についても等しい．ここで特殊相対性理論にならって，このような世界ベクトルはすべて方程式

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k = \text{一定数}$$

を満足するものと仮定しよう．ただしこの式の中央の二次式は縮退していない二式形式で，1 個の正次元と，3 個の負次元からなるものとする[4]．距離の基本形式は，上のような書きかたにより，任意の正の比例因子を別にすれば，

4)　ここでは，距離の基本形式に対して，前章とは符号が反対の定義を採用する．いままでの符号のとりかたは世界を時・空分割するのに好都合であった．しかしこれから述べる一般論では，ここに採用した定義の方が目的にかなっていることがわかるであろう．

完全に決定される．しかしここでさらに，つぎのような実験を行なったとしよう：たとえば2個の原子時計を考えよう．その周期はそれが放出する光のスペクトル線によって読みとることができる．いまこれらの時計が世界点 O を通過するとき同じ周期をもっているとする．これらが O を通過したのち，世界の中の異なる道をたどって，再び他の世界点 O′ で出会ったとする．われわれの経験によれば，O′ でもこれら2個の時計の周期は互いに等しい．この経験の結果，時間の単位を O から O′ まで道筋に無関係に移すことが可能であることがわかった〔あるいはこれは時間の単位というよりも，世界ベクトルの“大きさ”の単位というべきである：訳者〕．したがって**世界の“大きさの幾何学”**（Massgeometrie）**はリーマン的である**〔つまり，有限のへだたりをもつ2個の世界点において，ベクトルの“大きさ”を比較することが可能であることが，上の経験からわかる：訳者〕．

“大きさ”の場（Massfeld）と慣性場の間の関係を物理的方法によって確立するために，自由に運動している質点に時計を結びつける．これは前章で既に用いた技巧を再びここでも使いたいからである．ここでガリレイの慣性の法則につぎのような補足を付け加える．すなわち質点が方程式（1）を満足する“直線”をえがいて運動しているあいだに，これに結びつけられた時計は，（1）にでてきたパラメーター s を，その時間の数として文字盤の上に表わすようにする．あるいはむしろ逆につぎのようにいう方がもっ

と適切であろう：ひとつのベクトルの平行移動の過程は，物理的には，外力の影響なしにまったく自由に放置された時計の行動（世界における）によって与えられる（定義される）．時計の読みが固有時間 ds だけ進むあいだに，この時計（またはそれとくっついた質点）は世界点 P を起点とする線素 (dx^i) だけその位置を進める．$\xi^i = dx^i/ds$ はこの時計の“世界速度”を示すベクトルの成分である．この時計は，このベクトルを点 $\mathrm{P} = (x^i)$ から，その運動方向にあって P に無限に近接している点 $\mathrm{P}' = (x^i + dx^i)$ まで運搬する．いま点 $\mathrm{P}' = (x^i + dx^i)$ における時計の世界速度の成分を $\xi^i + d\xi^i$ とすれば，点 P においてつぎのような特別な座標系を設けることができる．すなわちそれを基準にとれば，上述のようなベクトルの移動に際して，P を起点とする任意の運動方向に対して $d\xi^i = 0$ がなりたつような座標系である．これを任意の他の座標系からみればつぎのようになる（§15 参照）．

$$d\xi^i = -\Gamma^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta ds, \qquad (\Gamma^i_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{\beta\alpha}).$$

そこで P に在る任意のベクトル (ξ^i) を，P に無限に近接した他の任意の点 $\mathrm{P}' = (x^i + dx^i)$ まで無限小平行移動させるという過程は，座標系のとりかたに無関係に，公式

$$d\xi^i = -\Gamma^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha dx^\beta \tag{2}$$

によって与えられることになる．この式から自由に放置された時計は世界のアフィン接続をわれわれに示してくれる．ひとつの時計が，それのもつ無限小の 1 周期のあいだに進む世界距離（つまり世界の中で 1 周期のあいだにおこなわ

れた時計の変位を示すベクトルの不変的大きさ）は，定義により，いかなる時点でも同じ“大きさ”をもつ．詳しくいえば，点 P における，時計の運動方向を示す時間的世界ベクトル ξ^i を，点 P から ξ^i の方向に在り，P に無限に近い隣接点 P′ まで，ξ^i 自身に平行に無限小変位させたとき，その“大きさ”の計量値

$$g_{ik}\xi^i\xi^k$$

は不変である．そこでいま数学的な補助的構造として，§ 17 の説明にしたがって，計量テンソルから一意的に決定される接続係数 $\tilde{\Gamma}^i_{\alpha\beta}$ を導入したとすれば，ひとつの（時間的）ベクトルに対して $\tilde{\Gamma}$ を用いて無限小平行移動を考えたとき，その結果は (2) の過程の結果と一致する（ただし移動方向をベクトル自身の方向にとった場合）．つまり

$$\tilde{\Gamma}^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = \Gamma^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta$$

が点 P にある任意の時間的ベクトル ξ^i に対して成立することになる．そこで Γ（および $\tilde{\Gamma}$）の添字 α，β の対称性を考えに入れると

$$\tilde{\Gamma}^i_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{\alpha\beta}$$

が導かれる．**すなわちアフィン接続（= 世界の中にある慣性場）は第 II 章に説明された方法で，世界の計量場から決定される．**

上に述べた考察から，一見われわれにはなじみの少ない，アインシュタインの考え，つまり“大きさの幾何学”と重力との総合が物理学的に何を意味するかが，明らかになったと思う．歴史的にそれまで完全に別のものとされていた

二つの知識領域，すなわち幾何学と重力のこのような天才的な統合をわれわれはつぎのような図式で表わすことができる：

$$\underbrace{\text{ピタゴラス}\qquad\text{ニュートン}}_{\text{アインシュタイン}}.$$

ここに登場する概念の物理学的関係が，第II章に展開されたそれの数学的関係と完全に平行関係にあることも [4]，理解できるであろう．

幾何学的な事情が運動によってどのような影響をこうむるかは簡単な直観的な例によって明らかにすることができる．いま一様な回転速度で回転しているひとつの平面円盤を考えよう．ある基準空間 R からみて，この円盤は一様な回転運動をしているとし，その基準空間ではユークリッド幾何学がなりたつとすれば，この回転円盤と一緒に運動している物さしを用いてこの円盤上の長さや角度を測った場合には，この円盤上ではユークリッド幾何学は成立しない．この主張を説明するために，円盤上に，回転の中心点を中心とする円を描いたとしよう．この半径については，円盤上にあって，円盤と一緒に運動している物さしを用いても，あるいはさきにのべた基準空間 R の中に静止している物さしで測っても，半径の大きさは等しい計量値を示す．なんとなれば，半径の上におかれた物さしの長さの方向は運動の方向に垂直であるから．これに対して，円周の長さは，円盤にくっついて回転している物さしを用いて，それを測定

するときは，物さしがローレンツ収縮をこうむっているから，逆に測定値は，静止物さしを用いた場合に比べて大きな値となる．したがって回転円盤上ではユークリッド幾何学はもはやなりたたない．なんとなればユークリッド幾何学の満たす関係：円周 $=2\pi\times$ 半径 が成立しないから [5].

計量とアフィン接続係数の関係をあたえる式

$$g_{ij}\Gamma^j_{kr}+g_{kj}\Gamma^j_{ir}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} \tag{3}$$

は計量場が，慣性場のポテンシャルに相当することを示す．したがってニュートンの万有引力の法則の一部はこの新しい理論のなかにすでにもちこまれていることがわかる．すなわち，ニュートンによれば，重力はポテンシャルから導かれるが，それとまったく同じように，慣性場も，計量場というポテンシャルから導かれる．自由に運動している質量 m の質点に，慣性場が与える 4 次元力は

$$-m\Gamma^i_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \tag{4}$$

(u^i は質点の 4 次元速度）である．これは電磁場が電荷 e におよぼす力

$$-eF_{ik}u^k$$

に非常によく似た形をしている[5)]．電磁場による力は 4 次元速度 u^i について 1 次式だが，慣性力は u^i の 2 次式である．――ニュートンの重力論では，ある質点に作用する重力は，その質点の速度に無関係であった．しかし電気力学

5)　距離の基本形式の符号を逆にえらんだために，電磁場による力の符号も，たとえば，§26（55）と逆になっている．

では，磁場 $\underline{\boldsymbol{H}}$ が，運動している電荷に与える力は，ローレンツの力 $e[\underline{\boldsymbol{v}}\times\underline{\boldsymbol{H}}]$ で表わされるように，電荷の速度に依存する．これと同様に，重力の近接作用論で，質点の速度に依存する補正項がでてくることは，もともと，ありそうなことであった．このことについて特にアインシュタインの理論は，この補正項が速度の2次式であるべきことを導いた．それはさらにつぎのような制限をうけている．すなわち慣性場，つまり重力場が単に3個の成分，または時間的成分を第4番目にいれて，4個の成分をもつといった簡単なものではなく，$4\times\dfrac{5\times4}{2}=40$ 個の成分をもつ $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ で表わされるということである．また電磁場が電荷に及ぼす力が速度の1次式であり，重力場が質点に働く力が，質点の速度の2次式になるということは，つぎのような微分の不変式の次数と一致している．すなわち電磁場 F_{ik} は，成分 φ_i をもつポテンシャルから

$$F_{ik}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^i}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^k} \tag{5}$$

によって導かれる．この φ_i は，微小変位 dx^i についての不変1次形式 $\varphi_i dx^i$ をあたえる．また慣性場（重力場）のポテンシャルの成分 g_{ik} は dx^i の不変2次形式

$$ds^2=g_{ik}dx^i dx^k \tag{6}$$

をあたえる．

電気力学　上の (5) と並ぶ，マックスウェルの方程式の第2の組は，真空中では

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}^{ik}}{\partial x^k} = 0. \tag{7}$$

これはそのままで，一般の座標変換に対して不変な形になっている．F_{ik} と $\boldsymbol{F}^{ik}$ の間の関係は，すでにその記号からもわかるように

$$g_{i\alpha} g_{k\beta} \boldsymbol{F}^{\alpha\beta} = \sqrt{g} \cdot F_{ik}, \qquad g = -\det(g_{ik})$$

である．またマックスウェル場の作用量は

$$\frac{1}{4} \int F_{ik} \boldsymbol{F}^{ik} dx \qquad (dx = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3) \tag{8}$$

で与えられる．これは任意の一般座標変換に対して，不変な積分である．ローレンツの電子論では，物質は一種の連続物体として扱われる．したがってその総量は強度量として測られるから，それの各部分の質量や電荷は密度量であり，それらは，スカラーやテンソルでなく，スカラー密度やテンソル密度で表わされるべきものである．そこで§26 の（56）のかわりに，質量密度 μ，電荷密度 ρ を

$$dm \cdot ds = \mu dx = \mu dx^0 dx^1 dx^2 dx^3,$$

$$de \cdot ds = \rho dx$$

で定義する．ただし物質の微小部分が描く世界線の無限小固有時間 ds は（6）で与えられるものとする．ローレンツの理論では，物質（電荷）の影響を取りいれる場合には，（7）のかわりに，

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}^{ik}}{\partial x^k} = \boldsymbol{s}^i \tag{9}$$

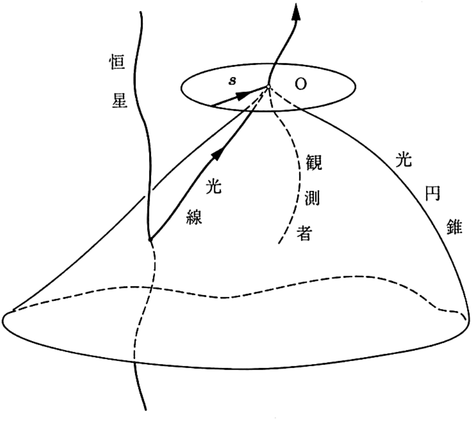
を用いる．この右辺にでてきた4（次）元電流密度 $\boldsymbol{s}^i$ は

$$\boldsymbol{s}^i = \rho u^i \qquad (u^i = \frac{dx^i}{ds})$$

で定義される．以上に述べたことにより，特殊相対性理論における電磁場の法則を一般相対性理論における法則に書きかえることが，いかに容易に自然に遂行されるかがわかったであろう（これ以外のことについては§18を参照）．

任意の世界点Oを通るすべての時間的測地線を考えよう．これらは二つの“円錐”を作る．点Oは両円錐の頂点に一致し，その一方の円錐は未来に向かって，他は過去の方に開いている．未来に向かって開いている円錐はOの“能動的未来”に属するすべての世界点を含む．これに対してもう一方の円錐はOの“受動的過去”を形成するすべての世界点を含む．これら両円錐の表面（つまり円錐面）はゼロ測地線（つまりその曲線の線素は $ds=0$ を満足するような測地線）から作られている．未来を向く円錐の表面上のすべての世界点にはOから発射された光の信号が必ず到達する．一般的にいえばOから出される任意の作用の到達しうる限界点がこの表面上の点である．したがって距離の基本形式は，世界の中でどの点とどの点が互いに作用的に関連することができるかを規定する．ところで，物さしや時計を用いなくとも，光の信号の到着や，自由に放置された質点の運動を観測することによって計量場の様子を観測することができる．いまOと無限小の距離だけはなれた点をO′とし，O′とOの座標の差を dx^i とする．もし

$g_{ik}dx^i dx^k=0$ ならば，またこのときに限り，O から発射された光の信号は O′ を通過する．そこで O に近接した多くの点で O からの光の信号が到着するのを観測することによって，点 O における g_{ik} の各成分の値の比を知ることができる．O 以外の点でも，O について述べたと同じことを繰り返せば，その点における g_{ik} の値の比を測定できる．しかし光の伝播の現象からは，一般にはこれ以上に多くの知識をとり出すことはできない．なんとなれば本書上巻 273 ページに述べた注意からもわかるように，ゼロ測地線は g_{ik} の各成分の値の比のみに依存するからである．観測者（簡単のために観測者の眼を 1 点で示す）が，たとえばある瞬間に，星からの光を眼にいれたとする．この光の方向はつぎのように図示できる（第 20 図）．いまこの瞬間観測者の



第 20 図

いる世界点を O とする．O を頂点とし過去の方に開いた光円錐面が星の世界線と交わる点から円錐面にそって O に達する測地線が，星からの光の世界線を示すゼロ測地線である．この光の世界線の O における方向は，ふたつの成分に分けることができる．ひとつは観測者の世界線の O における世界方向 $\boldsymbol{e}$ への射影，もうひとつは $\boldsymbol{e}$ に垂直な方向をもつ $\boldsymbol{s}$ である［$\boldsymbol{s}$ が $\boldsymbol{e}$ に垂直とは，O における計量 g_{ik} を用いて，$\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{e}$ の双一次形式を作ったとき，それが 0 になることである（本書上巻 262 ページ参照）．$\boldsymbol{s}$ を光線の空間的方向という］．O において，$\boldsymbol{e}$ に垂直な線素の全体が張る 3 次元線形多様体の中では，ds^2 は負定符号の 2 次形式となる．そこで種々の星から来る光線の空間的方向 $\boldsymbol{s}$ どうしの間の角は，この負定符号の計量基本二次形式に対応する双一次形式を使って計算される［§11 の式（15）を参照］．この角は，観測者によって観測されたおのおのの星の相対的位置を決定するものである．単に物理学的な事物の間の作用のみならず，精神物理学的相互作用も連続の法則に従う．われわれからみて，われわれの知覚する対象が存在する方向は，その対象が存在している場所自身によってきめられるのではなく，その対象からわれわれの網膜にはいり込む光線の方向によって決定される．われわれの意識経験の中に具象的な世界としてその姿を現わす“自然”，それを包むこの不可思議な現実の実体と直接接触している光学的場の状態が，対象の方向を決定する．

g_{ik} の全成分に共通な比例因子は光の伝播現象からは決

定されない．これは質量をもつ物体（質点）の運動によって決定される．その場合，この質点に時計を結びつける必要はない [6]．

§ 30　重力に対するアインシュタインの基本法則

ニュートンの理論によれば，物質の状態はひとつの**スカラー量**である質量密度 μ によって表現され，また重力ポテンシャルもひとつの**スカラー** Φ であらわされる．それはポアッソン型の方程式

$$\Delta\Phi=4\pi k\mu \quad [\Delta=\mathrm{div}(\mathrm{grad})\ ;\ k=\text{万有引力定数}] \tag{10}$$

を満足する．これが，物質の重力場を決定する法則である．相対性理論によれば，物質の状態は厳密な意味ではただひとつの対称 2 階テンソル T_{ik} により表わされる．あるいはこれに対応した混合 2 階テンソル密度 $\boldsymbol{T}_i^k$ を用いる方がもっと適切である．これに対応して重力場のポテンシャルもひとつの 2 階対称テンソル g_{ik} で記述される．したがってアインシュタインの理論では（10）のかわりに，g_{ik} の 2 階微係数を含む量を左辺にもつ方程式系が登場するであろう．またその右辺にはエネルギー・テンソル密度 $\boldsymbol{T}$ の成分が顔をだすことが予想されよう．この方程式系はもちろん，一般座標変換に対して不変でなければならない．重力場の方程式を見つけるのに最もよい方法は § 26 に公式化されたハミルトンの原理を用いることである．そこでは，全作用量は三つの部分からできていた．すなわち電荷にもとづく

物質的作用量，場的作用量および質量の物質的作用量の三つである．これに対して第 4 の作用量，すなわち重力の場的作用量〔訳者注：電磁場にもとづく作用量を電荷の場的作用量と呼ぶならば，重力場のもつ作用量も“質量の場的作用量”と呼ぶ方が適当と思う〕が欠落している．これがこれからわれわれが提示しようとするものである．しかしこれをする前に，まずつぎのことを計算しよう．すなわち電磁場のポテンシャル φ_i，および物質素片の世界線に対しては，なんらの変化もさせないが，計量場，すなわち重力のポテンシャル g_{ik} に対しては，無限小の仮想的変化 δ を与えたとき，さきに述べた三つの作用量の和がいかなる変化をこうむるかを計算してみよう．このような変分は一般相対性理論においてはじめて，でてくる問題である．

このような仮想的変分に対して，電荷の物質的作用量はなんらの変化をもこうむらない．一方，場的作用量においては，それの被積分関数

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{S} = \frac{1}{4}F_{ik}\boldsymbol{F}^{ik}$$

がこうむる変分は

$$\frac{1}{4}\{\sqrt{g}\delta(F_{ik}F^{ik}) + (F_{ik}F^{ik})\delta\sqrt{g}\}.$$

この $\{\quad\}$ のなかの第 1 項は $= \boldsymbol{F}_{ik}\delta F^{ik}$ となる．あるいは

$$F^{ik} = g^{ir}g^{ks}F_{rs}$$

であるから，この第 1 項はさらに

$$2\sqrt{g}F_{ik}F_r{}^k\delta g^{ir}$$

のようにもかきかえられる．{　}の第２項は§18，(61′)によって

$$= -\boldsymbol{S} g_{ik}\delta g^{ik}$$

となる．そこで場的作用量の変分は

$$-\int \frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{ik}\delta g^{ik}dx = \int \frac{1}{2}\boldsymbol{S}^{ik}\delta g_{ik}dx$$

となる（§18，(62) 参照）．ここで

$$\boldsymbol{S}_i^k = \frac{1}{2}\boldsymbol{S}\delta_i^k - F_{ir}\boldsymbol{F}^{kr} \tag{11}$$

は，電磁場のエネルギー・テンソル密度の成分である[6)]．電磁場のエネルギー・運動量・テンソル密度に対する複雑な表式（11）が本来，何にもとづくものか，ここにおいてわれわれは突然その理由を知ったわけである（われわれはここにおいてはじめて世界の計量の変分を考えることが可能になったから）．質量の物質的作用量についても，同様の結果を導くことができる．すなわち

$$\delta(\sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}) = \frac{1}{2}\frac{dx^i dx^k \delta g_{ik}}{ds} = \frac{1}{2}ds\cdot u^i u^k \delta g_{ik}.$$

したがって

$$\delta\int\left(dm\int\sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}\right) = \int\frac{1}{2}\mu u^i u^k \delta g_{ik}dx.$$

そこで計量場の変分にともなう全作用量（ただし前述の三つの作用量の和）の変分は

6)　距離の基本形式の符号を変えたため，第 III 章にあたえた定義と反対符号になっている．

$$\int \frac{1}{2} \boldsymbol{T}^{ik} \delta g_{ik} dx \tag{12}$$

となる．ここで $\boldsymbol{T}_i^k$ は電磁場と質量を含めた全体のエネルギー・テンソル密度である．

さていままで，ぬけていた**第 4 の作用量，すなわち重力の場的作用量もひとつの不変積分 $\int \boldsymbol{G} dx$ で表わされねばならない．この被積分関数 $\boldsymbol{G}$ はポテンシャル g_{ik} および重力場の成分 $\left\{ {ik \atop r} \right\}$**（あるいは，$g_{ik}$ およびその 1 階微係数 $g_{ik,r} = \partial g_{ik}/\partial x^r$）から作られるスカラー密度である．ただし g_{ik} の 2 階以上の高階微分を含む方程式は除外し，ただ 2 階の微分方程式のみが重力の法則を表現するべきものと考えた場合の主張である．いま $\boldsymbol{G}$ の全微分を

$$\delta \boldsymbol{G} = \frac{1}{2} \boldsymbol{G}^{ik} \delta g_{ik} + \frac{1}{2} \boldsymbol{G}^{ik,r} \delta g_{ik,r}$$
$$(\boldsymbol{G}^{ik} = \boldsymbol{G}^{ki}, \quad \boldsymbol{G}^{ik,r} = \boldsymbol{G}^{ki,r}), \tag{13}$$

と書けば，世界の中のある有界領域の外では 0 となる無限小変分 δg_{ik} に対して，部分積分を用いて，

$$\delta \int \boldsymbol{G} dx = \int \frac{1}{2} [\boldsymbol{G}]^{ik} \delta g_{ik} dx \tag{14}$$

を得る．ここで“ラグランジュ表式” $[\boldsymbol{G}]^{ik}$ は i と k について対称で，公式

$$[\boldsymbol{G}]^{ik} = \boldsymbol{G}^{ik} - \frac{\partial}{\partial x^r} \boldsymbol{G}^{ik,r}$$

によってあたえられる．そこで重力場の方程式は，もともと予定された形

$$[\boldsymbol{G}]_i^k = -\boldsymbol{T}_i^k \qquad (15')$$

を実際にもつことになる．さらに変分 δg_{ik} に応じてさきにのべた三つの作用量から（12）のようにエネルギー・運動量・テンソル密度が δg_{ik} の係数として導かれることも（15′）を見れば，驚くべきことではなく，むしろ当然のこととなる．——しかし残念なことにわれわれが望むようなスカラー密度 $\boldsymbol{G}$ は一般には存在しない．なんとなれば，世界の中の任意の点で，もし適当な座標系をとれば（すなわちその点における測地系をとれば），そこにおける $\left\{ {ik \atop r} \right\}$ の成分はすべて 0 となる．ところで，リーマンのスカラー曲率 R は，g_{ik} の 2 階微分を含むが，しかしそれについては，**一次式**であることを知っている．しかもそれは，そのような性質〔訳者注：g_{ik}, $\partial g_{ik}/\partial x^r$, $\partial^2 g_{ik}/\partial x^r \partial x^s$ だけから作られるスカラーで，$\partial^2 g_{ik}/\partial x^r \partial x^s$ については一次式であるという性質〕をもつ唯一のスカラーであることが証明できる[7]．また R が $\partial^2 g_{ik}/\partial x^r \partial x^s$ について一次式であるために，不変積分 $\int \frac{1}{2}\sqrt{g}R dx$ に部分積分をほどこすことによって，g_{ik} の 2 階微係数を取り除くことができる．すなわち

$$\int \frac{1}{2} R\sqrt{g} dx = \int \boldsymbol{G} dx + \int \frac{\partial \boldsymbol{W}^i}{\partial x^i} dx$$

の形になる．ここで $\boldsymbol{G}$ は g_{ik}，およびその 1 階微係数だけを含む．そこで無限小変分 δg_{ik} がある有界な領域の外では

7）　この証明は付録Ⅰにある．

0 になるとすれば,

$$\delta\int\frac{1}{2}R\sqrt{g}dx=\delta\int\boldsymbol{G}dx$$

となる．なんとなれば，部分積分によって

$$\int\frac{\partial(\delta\boldsymbol{W}^i)}{\partial x^i}dx=0$$

となるからである．上の結果から $\int\boldsymbol{G}dx$ 自身は不変量ではないが，この変分 $\delta\int\boldsymbol{G}dx$ はひとつの不変量であることがわかる．またハミルトンの原理を用いる際には，もっぱら $\delta\int\boldsymbol{G}dx$ だけが重要であり $\dfrac{\partial\boldsymbol{W}^i}{\partial x^i}$ の積分は何の効果ももたない．それゆえ $\int\boldsymbol{G}dx$ を重力場の作用量として採用することを躊躇する必要はない．しかもこの要請は唯一の可能なものであることが証明される．なおわれわれは $\boldsymbol{G}$ にある普遍定数 $1/\kappa$ をかける必要がある．なんとなれば $\boldsymbol{G}$ は他の既知の三つの作用密度とディメンションが異なるからである［世界の中にわれわれが任意にもちこんだ，各世界点の座標はディメンションのない数と考えるべきである．しかし ds^2 を規定するには任意にえらんだ長さの単位，(l) を導入しなければならない．したがって ds^2 は l^2 のディメンションをもつ．したがって g_{ik} のディメンションも l^2 である．第 2 の単位として質量 (m) がある．既知の三つの作用量はすべてディメンション ml（たとえば $dm\cdot ds$）をもつ．これに対して，$R\sqrt{g}$ は l^2 である．したがって定数 κ のディメンションは lm^{-1} となる．この値は，cm とグラムを単位に用いてつぎの節で与えられる．またさらに κ

は正の数であることも示される．なぜなら重力を生みだす質量は自分自身に引力を及ぼすから]．このようにしてわれわれは必然的にひとつのきまった重力場の方程式 (15′) に到達する．いま因数 κ を使ってこの式をはっきり書きくだせば

$$[\boldsymbol{G}]_i^k = -\kappa \boldsymbol{T}_i^k \tag{15}$$

となる．この式から，**すべての種類のエネルギーは重力を生みだす**ことが導かれる．つまり単に狭い意味の物質（たとえば電子や原子）の中に局在しているエネルギーのみならず，電磁場のエネルギーのように空間的に広く分布している場のエネルギー（なんとなれば $\boldsymbol{T}_i^k$ はすべての種類のエネルギー・テンソル密度の和を示すから）すらも重力を生みだすことになる．

重力場の方程式を具体的に書きくだすためには，実際，上にあたえた作用積分の変分を計算しなければならないが，それをやるまえに，ここでミーの理論に対しても，その作用積分の g_{ik} についての変分を計算することによって，ミーのエネルギー・テンソル密度を導くことができることを示そう．ミーの理論にでてきた作用量 $\int \boldsymbol{L}dx$ は一次変換に対して不変であるばかりでなく，一般座標変換に対しても不変である．なぜならば $\boldsymbol{L}$ は共変ベクトルの成分 φ_i（電磁ポテンシャル），2 階線形テンソル F_{ik}（電磁場の強さ），および計量基本テンソル g_{ik} だけから純粋に代数的（微分など使わず）に作られたものであるから．このような関数の全微分はつぎのような形に書かれるはずである：

$$\delta \boldsymbol{L} = \frac{1}{2} \boldsymbol{T}^{ik} \delta g_{ik} + \delta_0 \boldsymbol{L},$$
$$\delta_0 \boldsymbol{L} = \frac{1}{2} \boldsymbol{H}^{ik} \delta F_{ik} - \boldsymbol{s}^i \delta \varphi_i, \tag{16}$$
$$(\boldsymbol{T}^{ik} = \boldsymbol{T}^{ki},\ \boldsymbol{H}^{ik} = -\boldsymbol{H}^{ki}).$$

ここでテンソル密度 $\boldsymbol{T}_i^k$ をエネルギー密度とか“質量密度”と呼ぶことにする．上の式は，電磁場（そのポテンシャルが φ_i）と電荷の流れ（$\boldsymbol{s}^i$）の関係とまったく同じような関係が，計量場（すなわち重力のポテンシャルを表わす g_{ik}）と“質量密度”（$\boldsymbol{T}^{ik}$）の間にもなりたつことを示している．しかしわれわれはここで，上のように変分 δg_{ik} の係数として定義された $\boldsymbol{T}^{ik}$ がたしかに§28 の（72）に与えられたエネルギー・運動量密度に完全に一致することを証明する義務がある．それができれば，§28 で約束したエネルギー・テンソルの対称性の証明を与えたことになる．しかしさきにあげた具体例，すなわちマックスウェルの理論の場合のように，実際に具体的に計算をすすめることによって，求める結果に到達しようとしても，$\boldsymbol{L}$ の形が具体的にわかっていないから，これ以上進むことはできない．しかしつぎにのべる素晴らしく巧妙な方法はわれわれの目的をかなえてくれる．この素晴らしい方法のきっかけはラグランジュが考えついたものであるが，それの完全な形は F. クラインによって与えられた [7].

いま 4 次元連続体である世界の中に無限小の変形（変位）をあたえたと想像しよう．この無限小変位によって点（x^i）

は（$\bar{x}^i$）に移されるとする．両者の関係は

$$\bar{x}^i = x^i + \varepsilon\xi^i(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{17}$$

で与えられるとする（ε は無限小のパラメーター．これからの計算で ε の 2 乗，ならびにそれより高次のものはすべて切り捨てる）．この変形にともない物理系の状態を示す量も一緒に変形をこうむるものとする．たとえば変形後の新しい電磁ポテンシャルを $\overline{\varphi}_i$ とするとき，この新しい関数は dx^i の一次形式 $\varphi_i dx^i$ が不変になるようにきめられるものとする：

$$\varphi_i(x)dx^i = \overline{\varphi}_i(\bar{x})d\bar{x}^i. \tag{18}$$

まったく同じように，g_{ik}，ならびに F_{ik} を係数にもつ対称，ならびに反対称双一次形式も（18）と同じように，変形の前後で，その形を変えないものと要請する．これにより $\bar{g}_{ik}, \overline{F}_{ik}$ は規定される．そこで同一の点における φ の変化すなわち $\overline{\varphi}_i(x) - \varphi_i(x)$ を $\delta\varphi_i$ と記す．$\delta g_{ik}, \delta F_{ik}$ も同様に定義される．ところで $\boldsymbol{L}$ のなかの変形前の $\varphi_i(x), \cdots$ を，変形後の $\overline{\varphi}_i(x), \cdots$ でおきかえたものを $\overline{\boldsymbol{L}}$ とかけば，$\overline{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \delta\boldsymbol{L}$ となる．この $\delta\boldsymbol{L}$ は，（16）であたえられた $\delta\boldsymbol{L}$ の $\delta\varphi_i, \cdots$ 等に，ここで定義した $\delta\varphi_i$ を用いたものである．さらに任意にえらばれた積分領域 $\boldsymbol{X}$ は，変形によって $\overline{\boldsymbol{X}}$ に移される．その結果，作用量

$$\int_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{L}dx$$

のこうむる変化は

$$\delta' \int_{X} \boldsymbol{L} dx = \int_{\bar{X}} \bar{\boldsymbol{L}}(\bar{x}) d\bar{x} - \int_{X} \boldsymbol{L}(x) dx$$

となる[8)]．しかしこの右辺の第 1 項の積分は，適当な座標変換によって，その第 2 項とまったく同じ形に書きかえることができる．それは $\boldsymbol{L}$ がスカラー密度であり，したがってこの作用積分が不変量であることから容易にわかる．したがって

$$\delta' \int_{X} \boldsymbol{L} dx = 0 \tag{19}$$

となる．そこでこの作用量の変化をこれからつぎのような二つの部分に分ける：1）$\bar{\boldsymbol{L}}$ と $\boldsymbol{L}$ の差を領域 $\boldsymbol{X}$ にわたって積分したもの，2）$\boldsymbol{L}$ を領域 $\bar{\boldsymbol{X}}$，ならびに $\boldsymbol{X}$ のそれぞれについて積分したものの差．まず 1）は，$\bar{\boldsymbol{X}}$ と $\boldsymbol{X}$ のちがいがわずかに ε の程度であることに注意して

$$\int_{\bar{X}} \{\bar{\boldsymbol{L}}(\bar{x}) - \boldsymbol{L}(\bar{x})\} d\bar{x} = \int_{X} \{\bar{\boldsymbol{L}}(x) - \boldsymbol{L}(x)\} dx$$
$$= \int_{X} \delta \boldsymbol{L} dx$$

となる[9)]．また 2）は本書上巻 242–243 ページにより

8） 訳者注：$\bar{\boldsymbol{L}}(\bar{x})$ とは，詳しく書けば $\boldsymbol{L}[\bar{\varphi}(\bar{x}), \bar{g}(\bar{x}), \bar{F}(\bar{x})]$ のことである．

9） 訳者注：ここで変形後の点 $\bar{x}$ における変形前の量 φ の値を $\varphi(\bar{x})$，また変形前の点 x における変形後の量 $\bar{\varphi}$ の値を $\bar{\varphi}(x)$ と記す．g_{ik}，F_{ik} についても同じ記法を使えば，本文の $\bar{\boldsymbol{L}}(x), \boldsymbol{L}(\bar{x})$ はつぎのように書きあらわされる：$\bar{\boldsymbol{L}}(x) = L[\bar{\varphi}(x), \bar{g}(x), \bar{F}(x)]$，$\boldsymbol{L}(\bar{x}) = \boldsymbol{L}[\varphi(\bar{x}),\ g(\bar{x}),\ F(\bar{x})]$．

$$\int_{\overline{\mathbf{X}}} \boldsymbol{L}(\bar{x})d\bar{x} - \int_{\mathbf{X}} \boldsymbol{L}(x)dx = \varepsilon \int_{\mathbf{X}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\boldsymbol{L}\xi^i)dx$$

となる．

さらに議論をすすめるためには，ここでまず変分 $\delta\varphi_i$，δg_{ik}，δF_{ik} を具体的に計算しておく必要がある．いましばらく

$$\bar{\varphi}_i(\bar{x}) - \varphi_i(x) = \delta'\varphi_i$$

と記すことにすれば，(18) によって

$$\delta'\varphi_i dx^i + \varepsilon\varphi_r d\xi^r = 0.$$

したがって

$$\delta'\varphi_i = -\varepsilon\varphi_r \frac{\partial\xi^r}{\partial x^i}.$$

そこで

$$\delta\varphi_i = \delta'\varphi_i - \{\bar{\varphi}_i(\bar{x}) - \bar{\varphi}_i(x)\} = \delta'\varphi_i - \varepsilon\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^r}\xi^r$$

という関係を用い，さらに $\varepsilon\xi^r(x)$ のかわりに $\xi^r(x)$ と書くことにすれば，

$$-\delta\varphi_i = \varphi_r\frac{\partial\xi^r}{\partial x^i} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x^r}\xi^r. \tag{20}$$

まったく同様に

$$-\delta g_{ik} = g_{ir}\frac{\partial\xi^r}{\partial x^k} + g_{rk}\frac{\partial\xi^r}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}\xi^r, \tag{20'}$$

$$-\delta F_{ik} = F_{ir}\frac{\partial\xi^r}{\partial x^k} + F_{rk}\frac{\partial\xi^r}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^r}\xi^r. \tag{20''}$$

ここで

$$F_{ik}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^i}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^k}$$

であるから

$$\delta F_{ik}=\frac{\partial(\delta\varphi_k)}{\partial x^i}-\frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x^k} \tag{21}$$

もなりたつ．なんとなれば F_{ik} と φ_i の微分関係式は一般座標変換に対して不変な関係だから（ここで考えている変形は座標変換ではないが）

$$\bar{F}_{ik}(\bar{x})=\frac{\partial\bar{\varphi}_k(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}-\frac{\partial\bar{\varphi}_i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^k}$$

が成立することがわかる．点 $\bar{x}$ のかわりに，点 x では上の関係式は

$$\bar{F}_{ik}(x)=\frac{\partial\bar{\varphi}_k(x)}{\partial x^i}-\frac{\partial\bar{\varphi}_i(x)}{\partial x^k}$$

となる．そこで（21）のすぐ前にでた $F_{ik}(x)$ の定義式との差をとれば，（21）が導かれる．（20）～（20″）を（16）に代入すれば

$$-\delta\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{T}_i^k+\boldsymbol{H}^{rk}F_{ri}-\boldsymbol{s}^k\varphi_i)\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}$$
$$+\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{T}^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}+\cdots+\cdots\right)\xi^i$$

となる．ここで ξ^i の微分を部分積分によって取りのぞき，さらに簡単のために

$$\boldsymbol{V}_i^k=\boldsymbol{T}_i^k+F_{ir}\boldsymbol{H}^{kr}-\varphi_i\boldsymbol{s}^k-\delta_i^k\boldsymbol{L}$$

とおけば，（19）は

$$-\delta'\int_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}dx =$$
$$\int_{\boldsymbol{X}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\boldsymbol{V}_i^k\xi^i)dx+\int_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}_i\xi^i)dx=0 \qquad (22)$$

となる．そこでよく知られているように，任意関数 ξ^i を，積分域 $\boldsymbol{X}$ の外では 0 となるように選ぶ．この時は（22）の第 1 積分は 0 となり，ξ^i が任意であることから，また $\boldsymbol{X}$ も任意に選べるから，結局任意の点で

$$\boldsymbol{t}_i=0 \qquad (23)$$

が導かれる．そこで（22）の第 2 積分は常に 0 となる．その結果（22）の第 1 積分も恒等的に 0 となる．すなわち任意の ξ^i に対し，また任意の $\boldsymbol{X}$ に対してこの第 1 積分は 0 となる．任意の積分域に対して連続関数の積分が 0 となるのは，その被積分関数自身がいたるところで 0 であるときにかぎる．したがって

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\boldsymbol{V}_i^k\xi^i)=\boldsymbol{V}_i^k\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}+\frac{\partial\boldsymbol{V}_i^k}{\partial x^k}\xi^i=0.$$

ξ^i，$\partial\xi^i/\partial x^k$ はまったく勝手な値をとりうるから，結局

$$\boldsymbol{V}_i^k=0, \qquad \left(\frac{\partial\boldsymbol{V}_i^k}{\partial x^k}=0\right).$$

そこで求める関係式

$$\boldsymbol{T}_i^k=\boldsymbol{L}\delta_i^k-F_{ir}\boldsymbol{H}^{kr}+\varphi_i\boldsymbol{s}^k$$

が導かれる．

上の議論はまた，同時にエネルギー・運動量の保存則をも導きだしてくれる．この保存則は§28 では，実際に計算をおこなった結果，その成立することが確認された．ここ

では，保存則は（23）のなかに含まれている．さきにも扱ったような，ある有界の領域の外では 0 となる“世界の無限小変形”を考えるとき，これに対して，世界全体のもつ作用量は，その不変性のために変化しない[10]．すなわち

$$\int \delta \boldsymbol{L} dx = \int \frac{1}{2} \boldsymbol{T}^{ik} \delta g_{ik} dx + \int \delta_0 \boldsymbol{L} dx = 0. \qquad (24)$$

ここで（21）の関係と，ハミルトンの原理（あるいはマックスウェルの方程式）

$$\int \delta_0 \boldsymbol{L} dx = 0 \qquad (25)$$

のために，（24）の第 2 項は 0 となる．一方，（24）の第 1 項は，（20′）を使うと

$$= -\int \left(\boldsymbol{T}_i^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \boldsymbol{T}^{\alpha\beta} \xi^i \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \boldsymbol{T}^{\alpha\beta} \right) \xi^i dx$$

となる．そこで**電磁場の法則の結果**として，つぎのような方程式が導かれる：

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \boldsymbol{T}^{\alpha\beta} = 0. \qquad (26)$$

[一般相対性理論では重力場の存在にもとづく第 2 項が付

---

10) 訳者注：前に述べた第 2 の部分，すなわち，$\overline{\boldsymbol{X}}$ にわたる $\boldsymbol{L}$ の積分と，$\boldsymbol{X}$ にわたる積分の差は，$\boldsymbol{X}$ の表面にわたる表面積分となり，表面での変形 $\xi^i = 0$ のため，これは結局考える必要がなくなる．

け加わるために，(26) を保存則と呼ぶことは適当でない．(26) が実際に保存則として解釈できるかどうかは，§37ではじめて確かめられる]．

さて重力場の作用量をつけ加えることによって，ハミルトンの原理から

$$\delta\int(\kappa \boldsymbol{L}+\boldsymbol{G})dx=0 \tag{27}$$

がでてくる．ここでは電磁場と重力場の状態量が互いに独立な，無限小仮想的変化をこうむるものとする．それに応じて，電磁場の法則のほかに，重力場の方程式 (15) が導かれる．ここで (26) を導いた考えかたを $\boldsymbol{L}$ のかわりに $\boldsymbol{G}$ に適用すれば，有界な領域外では 0 となる“世界の無限小変形”δ に対して

$$\delta\int \boldsymbol{G}dx=\delta\int\frac{1}{2}R\sqrt{g}dx=0$$

がなりたつ．この結果から，(26) に似た数学的恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x^k}[\boldsymbol{G}]_i^k-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}[\boldsymbol{G}]^{\alpha\beta}=0 \tag{26$'$}$$

が導かれる．$\boldsymbol{G}$ が g_{ik} ばかりでなく，その微分も含むということは (26′) をだすのに，なんら問題にならない．そこで方程式 (15) を採用するならば，前に証明した関係式 (26) は電磁場の法則の結果であるばかりでなく，重力場の方程式 (15) からも導かれることがわかる．

ここに示された種々の方程式の間の驚くべき関係は，ミーの電気力学が成立するかどうかという疑問とは無関係に，

つぎのように一般的に公式化される．いまひとつの物理系が，ある座標系を基準として，時空座標を変数とするある関数（**状態量**）φ（これはミーの理論では φ_i であった）によって記述されるとする．このほかに計量場のポテンシャル g_{ik} が登場する．この物理系はこの計量場の中に置かれているわけである．この物理系の演ずる諸現象を支配する法則はひとつの積分不変量 $\int \boldsymbol{L}dx$ によって与えられるものとする．ここでスカラー密度 $\boldsymbol{L}$ は，φ およびその1階微分，ときにはそれ以上の高階微分の関数として与えられているものとする．このほかに g_{ik} も $\boldsymbol{L}$ の中に含まれるが，g_{ik} の微分は含まれないとする．そこで $\boldsymbol{L}$ の全微分をつぎのようにおく．ただし δg_{ik} を含む部分だけをはっきりと，つぎのように書きあらわす：

$$\delta \boldsymbol{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{T}^{ik}\delta g_{ik} + \delta_0 \boldsymbol{L}.$$

この式から $\boldsymbol{T}_i^k$ は，この物理系の状態と結びついた**エネルギー・テンソル密度**であるといってよい．この各成分の具体的な形の決定は，この場合にはハミルトン関数 $\boldsymbol{L}$ の決定に帰着される．**世界の計量の変化を可能にさせた一般相対性理論だけが，エネルギー・運動量テンソルの真の定義を与えることができるといえよう．**この物理系の状態を規定する法則は，“部分的な作用原理”，つまり φ だけに仮想的変化をあたえることによって導かれる（25）という式であたえられる．この（25）から φ の独立な成分の個数と同じ数だけの方程式が導かれる．さらに g_{ik} も変化させれば，全

作用量の変分（27）から，さらに10個の重力場の方程式（15）が導かれる．これらは10個のポテンシャル g_{ik} の行動を規定するものである．方程式（26）はこの場合にも φ に対する法則（φ 場の方程式）からも導かれるし，また重力の法則（15）と，恒等式（26′）からも導かれる．われわれはこの（26）を重力場の方程式と φ 場の方程式のエリミナント (Eliminante) と呼ぶことができよう．このように φ 場および重力場を一緒にした全系には4個の余計な方程式が含まれていることがわかる．実際この全方程式系に対する一般解は4個の任意関数を含む．なんとなれば，全方程式系は一般座標変換に対する不変性の結果，どのような座標系を基準にとってもかまわない．したがって方程式系のある1組の解から，任意の一般座標変換を行なうことによって，他の1組の解を得る（しかし，この解の表わす世界のふるまいは前の解の表わす世界のふるまいと客観的には同じものを表わす）．その昔の幾何学と力学と物理学の三者への分割は，アインシュタインの理論では，ここに一般的な形で述べたように，物理的状態（φ 場で記述されるもの）と計量場（すなわち重力場）という対立におきかえられねばならない．

さて，話を完全なものにするために，具体的な例題としてマックスウェル - ローレンツの理論に対するハミルトン原理にもう一度たちもどる．φ_i の変分は電磁場の法則を，g_{ik} のそれは重力場の法則をあたえる．作用量はひとつの不変量であるから，世界の無限小変形が作用量にあたえる

変化は $=0$ となる．その場合電磁場，重力場ならびに物質素片の描く世界線はいずれも，この世界の変形に伴って，変化を受ける．作用量の変化は三つの部分の和に表わされる：すなわち電磁場，重力場ならびに物質素片の世界軌道の変分により引きおこされるものの和である．ところではじめのふたつの部分は，電磁場および重力場の方程式を使えば 0 となる．したがって残る第三の部分も 0 となる．これが（26）に相当する力学的方程式である．このように，この力学的方程式は前二者の法則（場の方程式）の結果として導かれる．この計算の概略をここに繰り返せば，つぎのようになる：

重力場の方程式から（26），すなわち今の場合には[11)]

$$\mu U_i + u_i M = -\left\{ \frac{\partial}{\partial x^k} \boldsymbol{S}_i^k - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \boldsymbol{S}^{\alpha\beta} \right\} \tag{28}$$

が導かれる．ここでは $\boldsymbol{S}_i^k$ は電磁場のエネルギー・テンソル密度を示し，U_i の定義は

$$U_i = \frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} u^\alpha u^\beta$$

である．また M は

$$M = \frac{\partial(\mu u^i)}{\partial x^i}$$

を表わす．マックスウェルの方程式を使えば，（28）の右辺は

11） 訳者注：（26）の $\boldsymbol{T}_i^k$ を $\boldsymbol{T}_i^k = \boldsymbol{S}_i^k + \mu u_i u^k$ とおけばよい．

$$= \boldsymbol{p}_i = -F_{ik}\boldsymbol{s}^k \qquad (\boldsymbol{s}^i = \rho u^i)$$

となる，そこで（28）の両辺に u^i をかけ，i について和をとれば，$M=0$ がでてくる．そこで物質の流れに対する連続の方程式が導かれたことになる．また（28）［あるいは(26)］も力学でよく知られた形になる：

$$\mu\left(\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}u^\alpha u^\beta\right) = -F_{ik}\boldsymbol{s}^k.$$

以上で，重力の法則が他の物理学的諸法則の体系のなかにどのようにはいりこむかについて，完全な洞察を得たことと思う．そこで最後に残された問題は $[\boldsymbol{G}]_i^k$ を具体的に計算して見せることである［8］．すでに本書上巻 247–248 ページで説明したように，アフィン接続の成分の仮想的変化

$$\delta\Gamma^r_{ik} = \delta\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} = \gamma^r_{ik}$$

はひとつの 3 階混合テンソルの成分となる．いま任意の世界点で，そこの測地座標系を用いれば，R_{ik} に対する公式［§18，（63）参照］から，容易に

$$\delta R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^r}\gamma^r_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k}\gamma^r_{ir},$$

$$g^{ik}\delta R_{ik} = g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^r}\gamma^r_{ik} - g^{ir}\frac{\partial}{\partial x^r}\gamma^k_{ik}$$

となることがわかる．そこでいま

$$g^{ik}\gamma^r_{ik} - g^{ir}\gamma^k_{ik} = w^r$$

とおけば，

$$g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{\partial w^r}{\partial x^r}$$

となる．w^i はひとつの反変ベクトルであるから，任意の座標系を基準にとれば，上の結果を利用して

$$\delta R = R_{ik}\delta g^{ik} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^r}(\sqrt{g}w^r)$$

となる．ところで積分を行なう際に，Div の項は除外してよいこと，および定義，

$$\delta\int R\sqrt{g}dx = \int[\boldsymbol{G}]^{ik}\delta g_{ik}dx = -\int[\boldsymbol{G}]_{ik}\delta g^{ik}dx$$

を思いだすと，($R_{ik} = R_{ki}$ に注意)

$$[\boldsymbol{G}]_{ik} = \sqrt{g}\left(\frac{1}{2}g_{ik}R - R_{ik}\right) = \frac{1}{2}g_{ik}\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_{ik},$$

$$[\boldsymbol{G}]_i^k = \frac{1}{2}\delta_i^k\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_i^k$$

がでてくる．したがって**重力場の方程式**はつぎのようになる：

$$\boxed{\boldsymbol{R}_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k\boldsymbol{R} = \kappa\boldsymbol{T}_i^k}. \tag{29}$$

数学的にみて，**重力場の厳密な法則は線形でない**ということに注意すべきである．重力場の強さ $\left\{\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right\}$ の微分については 1 次式であるが $\left\{\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right\}$ 自身については 2 次の項を含む．(29) を k と i について縮約すれば，

$$-\boldsymbol{R} = \kappa\boldsymbol{T} = \kappa\boldsymbol{T}_i^i$$

となる．したがって (29) はまた

$$\boldsymbol{R}_i^k = \kappa\left(\boldsymbol{T}_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k\boldsymbol{T}\right) \tag{30}$$

の形にもかき表わされる．アインシュタインの最初の論文では，彼はハミルトンの原理を用いなかった．そこで彼が導いた重力場の方程式の右辺には $-\dfrac{1}{2}\delta_i^k\boldsymbol{T}$ が落ちていた．後になって，この項はエネルギー・運動量の保存則からみて必要なものであることに彼は気がついた [9]．ここに説明されたような，ハミルトン原理によって貫かれた議論のはこび方はローレンツ，ヒルベルト，アインシュタイン，クラインおよび本書の原著者ワイルによってその後の研究により発見されたものである [10]．

これから後に必要になるので，$\boldsymbol{G}$ の計算をさらに付け加える．まず部分積分によって Div を除いて

$$\int R\sqrt{g}dx \quad を \quad 2\int \boldsymbol{G}dx$$

にかきかえるためには，つぎのかきかえが必要である：

$$\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^r}\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\sqrt{g}g^{ik}\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}\right) - \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\sqrt{g}g^{ik}\right),$$
$$\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{ik}\begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix}\right) - \begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{ik}\right).$$

これらを使うとつぎのようになる：

$$2\boldsymbol{G}=\begin{Bmatrix}is\\s\end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}g^{ik})-\begin{Bmatrix}ik\\r\end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^r}(\sqrt{g}g^{ik})$$
$$+\left(\begin{Bmatrix}ik\\r\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}rs\\r\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}ir\\s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}ks\\r\end{Bmatrix}\right)\sqrt{g}g^{ik}.$$

§18 の（60′），（60″）により上の式の右辺のはじめの二つの項はつぎのように書きかえられる：

$$=\left(-\begin{Bmatrix}is\\s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}kr\\i\end{Bmatrix}g^{kr}+2\begin{Bmatrix}ik\\r\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}rs\\i\end{Bmatrix}g^{sk}-\begin{Bmatrix}ik\\r\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}rs\\s\end{Bmatrix}g^{ik}\right)\sqrt{g}$$
$$=\left(-\begin{Bmatrix}rs\\s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}ik\\r\end{Bmatrix}+2\begin{Bmatrix}sk\\r\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}ri\\s\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}ik\\r\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}rs\\s\end{Bmatrix}\right)g^{ik}\sqrt{g}$$
$$=2\sqrt{g}g^{ik}\left(\begin{Bmatrix}ir\\s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}ks\\r\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}ik\\r\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}rs\\s\end{Bmatrix}\right).$$

そこで結局

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\boldsymbol{G}=\frac{1}{2}g^{ik}\left(\begin{Bmatrix}ir\\s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}ks\\r\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}ik\\r\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}rs\\s\end{Bmatrix}\right) \tag{31}$$

となる．

以上がアインシュタインの重力論の基礎の大要である．そこで上述のようにまったく，純理論的に導かれた理論が実験によって保証されるであろうかという懸念が生まれる．特に惑星の運動に関して，この理論は，ニュートンの万有引力の理論と同じように（あるいはそれよりもっとよく）現実を説明できるであろうかという疑念が生まれる．§31～35 ではここに導かれた重力場の方程式の解を扱う．一般論のさらに進んだ考察には，§36 においてはじめて再びたちもどるであろう．

§ 31　静的重力場．実験との比較

惑星系についてわれわれのもっている経験的知識とアインシュタインの理論とを比較するために，まずアインシュタインの法則を静的重力場に適用してみよう [11]．静的重力場とは，適当な座標系，すなわち“静的座標系”を用いた場合，世界が時間と空間に分離される場合のことである．つまり距離の基本形式が

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2, \qquad d\sigma^2 = \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik} dx^i dx^k$$

となる場合である．このときは

$$g_{00} = f^2, \qquad g_{0i} = g_{i0} = 0, \qquad g_{ik} = -\gamma_{ik},$$
$$(i, k = 1, 2, 3).$$

さらに f と γ_{ik} は $t = x^0$ には無関係で，x^1, x^2, x^3 だけの関数のとき，重力場は静的であるという．$d\sigma^2$ は正定符号の dx^i の二次形式で，座標 x^1, x^2, x^3 で表わされる 3 次元空間の距離を与える．また t は時間を示すものとすれば f は光の速さを表わすことになる．特別な場合を除けば，静的座標系の時間 t は，線形変換を度外視すれば，上に設けた要求から一意的にきまる．したがって任意に選びうることは，時間の原点と，時間の単位の選びかただけである．他方，静的空間座標については，x^1, x^2, x^3 のあいだの任意の連続変換が許される．したがって静的重力場の場合には世界の計量は空間の距離の定義のほかに，なお 3 次元空間

のひとつのスカラー場 f を与える．この場合には，われわれの普通用いる，いわゆる長さの絶対単位系を適用することができる．すなわち $d\sigma$ の測定には cm を，また t の測定には秒をその単位に採用すればよい．

3 次元 $d\sigma^2$ にもとづく，3 次元空間のクリストッフェルの三指標記号を肩に * をつけて，4 次元のそれと区別することにする．またラテンの添字 i，k，l は単に 1，2，3 だけを表わすものとすれば，定義により

$$\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}^*,$$

$$\begin{Bmatrix} ik \\ 0 \end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix} 0i \\ k \end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix} 00 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} i0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{f_i}{f}, \qquad \begin{Bmatrix} 00 \\ i \end{Bmatrix} = ff^i.$$

ここで $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$，$f^i = \gamma^{ik} f_k$，$f_i$ は 3 次元 grad の共変成分，f^i はそれの反変成分を示す．$\sqrt{\gamma} f^i = \boldsymbol{f}^i$ は空間の反変ベクトル密度の成分を示す．γ は γ_{ik} の 3 次元行列式を示し，$\sqrt{g} = f\sqrt{\gamma}$ である．さらに，つぎのような記号を使う：

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x^k} - \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}^* f_r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} - \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}^* \frac{\partial f}{\partial x^r}$$

（上の式の r については 1 から 3 まで和をとるものとする）．および

$$\Delta f = \frac{\partial \boldsymbol{f}^i}{\partial x^i} \quad \text{あるいは同じことであるが,} \ \Delta f = \sqrt{\gamma} \cdot f^i_i.$$

3 次元空間の距離 $d\sigma^2$ に対応する 3 次元空間の曲率テンソル P_{ik} と 4 次元世界の R_{ik} の間には，つぎの関係がなりたつことが簡単な計算によりたしかめられる：

$$R_{ik} = P_{ik} - \frac{f_{ik}}{f},$$

$$R_{i0} = R_{0i} = 0,$$

$$R_{00} = f\frac{\Delta f}{\sqrt{\gamma}}, \qquad (\boldsymbol{R}_0^0 = \Delta f).$$

静止した塵埃状の物質（物体内で，その各部分が互いに圧力や張力で作用し合っているような物を除く．したがって簡単には，埃（ホコリ）状の砂粒の集団を考えればよい）では，そのエネルギー・運動量テンソル密度の各成分のなかで，0 でないものは $\boldsymbol{T}_0^0 = \mu$ だけである．したがってスカラー密度 $\boldsymbol{T}$ もまた μ に等しい．静止している物体は静的重力場をつくる．重力場の方程式（30）の各成分のなかで，特に興味のあるのは $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 成分である．それは上に求めた結果を使うと

$$\Delta f = \frac{1}{2}\kappa\mu \tag{32}$$

となる．

いま空間座標 x^1, x^2, x^3 を適当にえらんで ds^2 が

$$c^2dt - \{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\} \tag{33}$$

から，ごくわずか（無限小とする）だけズレているものと仮定すれば，——このためには重力場を生みだしている源の物体の質量が無限小である必要がある——

$$f = c + \frac{\Phi}{c} \tag{34}$$

とおくことによって（Φ は無限小量），(32) は

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2\Phi}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2\Phi}{(\partial x^3)^2} = \frac{1}{2}\kappa c\mu \tag{10}$$

となる．μ は普通の単位系を用いるならば，質量密度の c 倍である．なお上に述べた仮定は，惑星系のなかでのわれわれの幾何学的経験によれば，非常によい近似でなりたっている．

さて，重力の源となっている静止物体の質量，つまり太陽の質量に比べれば，惑星の質量は非常に小さいから，惑星を太陽重力場のなかに置かれた“試験物体”として扱うことができよう．そこで惑星系の任意のひとつをとりだせば（惑星どうしの間の相互作用は無視する），その運動は太陽の静的重力場のなかにおける測地線によって与えられる．したがってその世界線は変分原理

$$\delta \int ds = 0$$

を満足する．ただし変分をうける世界線の両端は固定されているものとする．この式は静的重力場の場合には

$$\delta \int \sqrt{f^2 - v^2}\, dt = 0$$

となる．ここで

$$v^2 = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}$$

は惑星の3次元的速度の2乗である．これは相対性理論以前の古典力学にでてきた変分原理の式と似ている．すなわち“ラグランジュ関数”として

$$L=\sqrt{f^2-v^2}$$

とした場合がいまのわれわれの問題である．ここで上の場合と同じような近似を使い，さらに無限に弱い重力場の中を運動する試験物体の速度もまた c に比べて非常に小さいように座標系がえらばれているとすれば

$$\sqrt{f^2-v^2}=\sqrt{c^2+2\Phi-v^2}=c+\frac{1}{c}\left(\Phi-\frac{1}{2}v^2\right)$$

となる．また

$$v^2=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2=\sum_{i=1}^{3}(\dot{x}^i)^2$$

とおいてかまわないから，結局，われわれの変分式は

$$\delta\int\left\{\frac{1}{2}\sum_i(\dot{x}^i)^2-\Phi\right\}dt=0$$

となる．この結果から，質量 m の惑星は，これのもつ重力のポテンシャル・エネルギーを $m\Phi$ とみなせば，ちょうど，古典力学（ニュートン力学）に従って運動することがわかる．ここにおいて，ニュートンの理論との完全なる結びつきが得られたことになる．すなわち Φ はニュートンの万有引力のポテンシャルで，それはポアッソン型の方程式（10）を満足し，$\mathrm{k}=c^2\kappa/8\pi$ はニュートンの万有引力の定数である．k によく知られている万有引力定数の数値を代入すれば，κ は

$$\kappa = \frac{8\pi \mathrm{k}}{c^2} = 1.87 \times 10^{-27}\,\mathrm{cm} \cdot g^{-1}$$

となる．

計量基本形式のユークリッド的形式（33）からのズレは，上述のような粗い近似でも，惑星の世界線が（その運動が示すように）直線状の一様な運動とは異なって楕円軌道となる程度に大きなものである．――空間の計量 $d\sigma^2$ にもとづく 3 次元空間の幾何学については太陽系程度のスケールの空間では，ユークリッド幾何学からのズレはほとんど気がつかない程度にわずかであるのに，4 次元世界では上述のようにユークリッドからのズレは著しい（太陽系程度の大きなスケールの領域でも，測地線により作られる三角形の内角の和は 180° に比べてごくわずかしかちがわない）．このことは特につぎのような事情にもとづいている：例えば地球の公転軌道の半径はおよそ 8 光分であるが，この軌道を地球が一周するには 1 年かかるということである！（つまり $c \gg v$ である）．

静的重力場のなかにおける質点の運動ならびに光線のふるまいについての厳密な理論を，なおもう少し調べてみよう［12］．測地的世界線は § 18 によってつぎの二つの変分原理のどちらからも導かれる：

$$\delta \int \sqrt{Q} ds = 0 \quad \text{または} \quad \delta \int Q ds = 0. \qquad (35)$$

ここで

$$Q = g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}.$$

上の第２の変分式ではパラメーター s は適当にえらばれたものである必要がある．また“ゼロ曲線”（Nullinie）の場合は $Q=0$ という条件を満足する必要がある（これは光線の伝播をあたえる．この場合には，第２の変分式を扱わねばならない）．変分を計算する際には，積分の両端で世界線の仮想的変位は０と仮定する．いま $x^0=t$ の変分を考えると，静的場では，

$$\delta\int_a^b Q ds = \left[2f^2\frac{dx^0}{ds}\delta x^0\right]_a^b - 2\int_a^b \frac{d}{ds}\left(f^2\frac{dx^0}{ds}\right)\delta x^0 ds. \tag{36}$$
[12)]

したがって変分原理から

$$f^2\frac{dx^0}{ds} = \text{一定}.$$

そこでまず，光線の場合を考えることにすれば，パラメーター s の単位を適当にえらんで——単位の選択についての任意性をのぞけば，s は変分原理自身によって規格化される——上の式の右辺の一定数が１となるようにする．ここで，今までより一般的な，つぎのような変分を考える：すなわち光の空間的軌道については，その両端を固定した上で，仮想的な任意の軌道変形を考える．しかし時間については，今までの両端固定の条件をはずす．したがって，変

12)　$[\quad]_a^b$ を今後は面倒だから単に $[\quad]$ と記す（訳者）．

分原理の結果を使えば,

$$\delta \int Q ds = 2[\delta x^0] = 2\delta \int dt$$

となる．いま変形後の軌道にそっても，変形前の場合と同様に，光は“光速度”で進行するとすれば，変形後の軌道についても

$$Q = 0, \quad \text{あるいは} \quad d\sigma = f dt$$

がなりたつ．したがって

$$\delta \int dt = \delta \int \frac{d\sigma}{f} = 0 \tag{37}$$

となる．これによって，光線の空間的位置（進路）だけが決定される．これは“光は目的地に到達するのに要する時間が最短になるような進路をたどる”という**フェルマーの原理**にほかならない．この最後の形式では時間は完全に消去されている．もし光の進路の両端を固定したうえで，その途中の部分を任意に無限小量だけ変位することが許されるならば，この原理は，光の進路の途中のどの部分についても成立する．

いま静的重力場に対して，ある空間座標系 x^1, x^2, x^3 を用いたとする．別に直交座標系を備えたユークリッド空間を写像空間（Bildraum）として用意し，世界の中の点 (x^1, x^2, x^3) に，この写像空間の中の直交座標が (x^1, x^2, x^3) である点を対応させることにより，世界をグラフ的に表現することができる．いま写像空間の中に二つの静止している恒星 S_1, S_2 の位置と 1 人の静止している観測者 B の位置を記

入したとする．B からみた S_1, S_2 の間の視角はこの写像空間の中での直線 BS_1 と BS_2 の間の角ではなく，(37) を満足する“最短曲線”によってそれぞれ BS_1, BS_2 を結んだとき，まずこれら 2 曲線が B においてなす角を測定する．つぎに，ユークリッド空間の長さの単位を，計量基本形式 $d\sigma^2$ にもとづくリーマン空間の長さに換算する規則に従って，上述のユークリッド空間の角度をリーマン空間の角に換算した結果が真の視覚である［§11 の (15) 参照］．このようにして計算された角は，われわれが実測で求めたおのおのの星の間の相対的位置をあたえるものである．つまりこの角の数値は，観測器械の目盛盤の上にあらわれる数字である．点 B, S_1, S_2 は空間の中に固定されているが，もし大きな質量の物体が光の経路に近づけば $\angle S_1BS_2$ は変化する．これは光の進路が重力場によって彎曲されたためと解釈されるべきである．光線のこのような彎曲の例としては，特に太陽の重力場による彎曲がある．ここで上述のグラフ表示にでてきた x^1, x^2, x^3 を世界座標の空間部分に使えば，無限遠では世界の計量もユークリッド型になるから

$$d\sigma^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \qquad \text{(無限遠点で)}$$

がなりたつ．この座標系を使って太陽のすぐそばを通過する光線に対して，その彎曲を計算すると，1.74″（§ 34 を見よ）となる．これは太陽の最も近くに見える恒星の見かけの位置の観測可能な変位を意味する．このような恒星の位置はもちろん皆既蝕のときにのみ観測できるものである．ここで問題にする恒星は十分に明るく，できるだけ多数あ

ることが望ましい．またこの重力の作用が顕著であるように，その星の見かけの位置は，できるだけ太陽の表面に近いこと，しかしあまり近すぎてコロナの明るさにかくされることがない程度に離れている必要がある．このような条件に対して最もめぐまれた日が5月29日であった．すなわち1919年5月29日，幸運にも皆既蝕がおこった．アインシュタインの主張する光線の彎曲が起こるか否かを確認するために皆既蝕の観測できる地域に二組のイギリス観測隊が派遣された．一隊はブラジル北部のソブラルに，もうひとつの組はアフリカ西部のギニア湾のプリンシペ島に出むいた．その結果，前に述べた程度の彎曲がおきていることが確かめられた．最終的な測定結果はソブラル班のものは $1.98'' \pm 0.12''$，プリンシペ島の方は $1.61'' \pm 0.30''$ である [13].

アインシュタインの重力理論からの結論で，静的重力場内における光学的現象に対する影響のもうひとつの例は，空間内のあるきまった場所における宇宙時間 dt と固有時間 ds の間の関係[13)]

$$ds = f dt$$

にもとづくものである．それは多分，恵まれた情況のもとでは観測が可能となるものである．いま静止している2個のナトリウム原子があるとする．これらは客観的に完全に

---

13) 訳者注：ここにいう宇宙時間とは，静的重力場を記述する基礎に用いた座標系の時間 t のことである．この時間を用いたとき，光の速さは f となる．

等しい構造をしていると考えてよい．したがって両者が D 線の光を発射した場合，それぞれの固有時間で測ったとき，これらの光は，同じ振動数をもつはずである．このような方法で逆に，固有時間について，その等しい時間的長さを物理的に定義する．いまこれらの原子が存在する場所における f の値を f_1，f_2 とすれば，宇宙時間 t を用いた場合の D 線の振動数をそれぞれ ν_1，ν_2 とするとき，

$$\frac{\nu_1}{f_1}=\frac{\nu_2}{f_2}$$

という関係がなりたつ．他方静的重力場のなかではマックスウェルの方程式は，時間に関係する部分が $e^{i\nu t}$（ν は任意の定数の振動数を示す）という因子で表わされるような解をもつ．静的重力場のなかに静止している光源から発射された光の伝播にとってこの因子がこの光のふるまいについて決定的なものであると考えることは，きわめて無理のない考えである．この考えはすでに特殊相対性理論においてもその正当であることが確証されている．そこではこの考えにもとづいて実験的に証明されているドップラーの原理が導かれた．したがって静止した原子から発射された光は，宇宙時間 t を使ってその振動数を測定する場合には，全空間のどこにおいても，常に等しい振動数をもつことがわかる．そこで質量が非常に大きい星から発射されたナトリウムの D 線の光を，地上にあるナトリウム原子の出した D 線と地上にある同じ分光器を用いて比較したとき，星から来た光は，地上の光に比べて，そのスペクトル線がごく

わずか赤の方へ偏移しているはずである．なぜならば，大きな質量の星の近くでは $f\left(=c+\dfrac{\Phi}{c}\right)$ の値は，この星から遠くはなれた場所における f の値に比べて，ある程度小さいからである[14)]．質量 m_0 の星の中心から距離 r だけ離れた地点から発射された光が無限の遠方に到達したときそ

---

14)　訳者注：地球から距離 r だけはなれた場所にある質量 m_0 の恒星の表面でナトリウム原子の出した光が，宇宙時間 Δt のあいだに n 回振動したとすれば，宇宙時間を用いた振動数は $\nu=n/\Delta t$ である．また星の表面で，光源であるナトリウム原子の固有時間は，Δt のあいだに $\Delta s_1=f_1\Delta t$ だけ進む．したがって，星の表面にある光源の原子の固有時間で測った振動数は $\nu_0=\dfrac{n}{\Delta s_1}=\dfrac{\nu}{f_1}$．この光を地上で受けて，地上にあるナトリウム原子の固有時間で測った振動数を ν_0' とする．宇宙時間が Δt すすむあいだに地上の原子の固有時間は $\Delta s_2=f_2\Delta t$ すすむから，$\nu_0'=\dfrac{n}{\Delta s_2}=\dfrac{\nu}{f_2}=\dfrac{f_1}{f_2}\nu_0$ となる（ここで宇宙時間を使ったときの振動数 ν はどこでも一定であるということを使った．したがって地上でも星からの光が n 回振動するには宇宙時間は $n/\nu=\Delta t$ だけ必要となるからである）．ところでわれわれの近似では，星の半径を R とすれば，$f_1=c\left\{1-\dfrac{\kappa m_0}{R}\right\}$，$f_2=c\left\{1-\dfrac{\kappa m_0}{r}\right\}$．（ただし地球自身の作る重力は無視する）．したがって $r\gg R$ だから，$\nu_0'=\left(1-\dfrac{\kappa m_0}{R}\right)\nu_0<\nu_0$．地上のナトリウム原子と星のそれとは同じ構造と考えられるから，この ν_0 は，地上の原子の出す D 線を，地上で，光源の原子自身の固有時間を使って測定した振動数にほかならない．したがって地上の同じ D 線に比べて星からの光は振動数が

$$\frac{\nu_0'-\nu_0}{\nu_0}=-\frac{\kappa m_0}{R}$$

の割合で減少する．

の振動数の減少する割合は，われわれのいま用いている近似では（34）により$\left(1-\frac{\kappa m_0}{r}\right)$である．太陽表面から発射された波長 4000Å の青い光は，およそ 0.008Å ほど波長が長くなる．この値はわれわれの観測可能な範囲に属するものである．しかし実際にはつぎのような種々の現象が付け加わる：ドップラー効果，比較の対象となる地上の物質にもとづく誤差，太陽からの光線のスペクトル偏移にあらわれる不規則なゆらぎ（この原因はまだ一部分しか解明されていない），最後に密集した太陽光線のスペクトル線同士の間の干渉による摂動（それによって，ときには，二つのスペクトル線がただひとつの強度の山をもった 1 本の線に融合されてしまうこともある）等がそれである．これらの要素を考慮にいれたうえでも，現存する観測結果は理論的に推定される大きさの赤方偏移の存在を実証しているように思われる [14]．しかし赤方偏移の問題は，まだ完全に解決されたとはいいきれない．

実験によって理論を検討できる第 3 の可能性はつぎのことである．アインシュタインによれば，ニュートンの惑星運動の理論は厳密な理論の第 1 近似にすぎない．そこで厳密な理論であるアインシュタインの理論とニュートンの理論のちがいは，われわれの現在の実験技術をもって確認できる程度に大きいものかどうかという疑問が生まれる．この観点からみるとき，太陽に最も近い惑星である水星はこの疑問に答えるために最も好都合な対象である．実際，アインシュタインは，彼の近似計算をさらに一歩進めること

によって，**水星の楕円型軌道は**（他の惑星からの摂動による影響のほかにさらに）**全体として，水星が自己の軌道をまわる向きと同じ方向に，非常にゆっくり回転すること**を理論的に証明した．またこれは100年間に43″だけ回転することも算出した．シュヴァルツシルド［15］は，静止している物体の作る球対称の重力場の厳密解を求めた．さらにこの重力場のなかを運動する無限に小さな質量をもった質点の描く軌道を計算し，それによって上述のアインシュタインの結論と同じものを導いた．ルヴェリエ以来，水星の近日点の永年摂動のなかには，上述の程度の大きさの，理論と実験結果の違いが存在することが知られていた．それは他の惑星による摂動によっても説明することができなかった．この理論と実験のくいちがいを取り除くために多数の仮説が提案された［16］．――シュヴァルツシルドの与えた厳密解については§§ 33，34において，再びこれにふれる．

いままで述べたことにより，われわれのもっていた空間，時間に対する描像に対してアインシュタインの重力論がもたらした革命がどんなに根本的なものであるかが納得できよう．しかしこの反面，われわれの観測にかかる諸現象における，この新理論と従来の理論のちがいが，実際にはいかにわずかなものであるかもわれわれは知った．これらの現象のなかで，実際，観測できるものについては，既に実証が行なわれた．この理論を本来支持しているものは，われわれの経験的なことのなかにあるというよりも，むしろ

この理論自身の内的首尾一貫性，無矛盾性のなかにあることは明らかである．この首尾一貫性によって，アインシュタインの理論は古典力学を大きく変容した．またわれわれの理性にとって最も満足のいく方法で，運動の相対性および重力に関する謎を，この新理論が一挙に解決したという点も，この理論の正当性に対する大きな根拠である．

光線についてと同じように，静的重力場のなかにある質点の運動についても，その空間的軌道について，光の場合のフェルマーの原理に対応する，ひとつの変分原理を導くことができる．パラメーター s として質点の固有時間を用いれば，

$$Q = 1, \qquad f^2 \frac{dt}{ds} = 一定 = \frac{1}{E} \tag{38}$$

となる．この右の式はエネルギー積分にほかならない．ここで 2 種の変分原理（35）のなかで，第 1 のほうを使い，さらに光の場合にならって，空間軌道の変分に対しては，その始点と終点は固定したままにするが，時間座標 $x^0 = t$ の変分に対しては両端でも変分が 0 である必要はないとする．そこで（35）の左の変分式は（空間座標の変分による部分は変分原理により 0 となる）

$$\delta \int \sqrt{Q} ds = \left[\frac{1}{E} \delta t \right] = \delta \int \frac{dt}{E}. \tag{39}$$

いま固有時間を消去するために，（38）の第 1 式を，第 2 式の 2 乗で割れば

$$\frac{1}{f^4}\left\{f^2-\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right\}=E^2.$$

あるいは

$$d\sigma=f^2\sqrt{U}dt. \qquad (40)$$

ここで U は

$$U=\frac{1}{f^2}-E^2$$

である．(40) は質点がその軌道にそって走る速さの法則をあたえる．いま軌道の仮想的変形を考えるさいに，変形をうけた新しい軌道も，変形前の軌道の従うべき法則と同じ法則（同じ E をもった法則）に従うような変形を扱うとすれば，(39) から

$$\delta\int\frac{dt}{E}=\delta\int\frac{ds}{dt}dt=\delta\int\sqrt{f^2-\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2}dt=\delta\int Ef^2dt.$$

したがって

$$0=\delta\int\frac{1}{E}(1-f^2E^2)dt=\frac{1}{E}\delta\int f^2Udt.$$

あるいは dt を軌道にそった道のりの長さ $d\sigma$ で表わせば，時間は完全に表面から消えて

$$\delta\int\sqrt{U}d\sigma=0$$

となる．この式によってまず，質点の軌道を求めたのちに，(40) を使えば，その軌道を進行する質点の行動の時間的経過があたえられる．すなわち

$$dt = \frac{d\sigma}{f^2\sqrt{U}}$$

できまる．ここで特に $E=0$ とおけば，光線の場合の関係式が導かれる．

§ 32　重力波

重力場の源となるエネルギー・テンソル密度 $\boldsymbol{T}_i^k$ が無限に弱いという仮定のもとに，アインシュタインは重力場の方程式を一般的に解くことに成功した [17]．この仮定の場合には，座標系を適当にえらべば，g_{ik} は定数の $\overset{0}{g}_{ik}$ とわずか（すなわち無限小量 γ_{ik}）だけ異なるにすぎないと考えてよい．そこで世界は計量基本形式が

$$\overset{0}{g}_{ik} dx^i dx^k \tag{41}$$

であたえられる“ユークリッド”空間であるとする．またこの世界の中に 2 階対称テンソル場 γ_{ik} が分布していると考える．したがって今後の計算では，常に基本形式（41）で与えられる計量を基礎としてすべての演算が行なわれるものとする．したがってわれわれはしばらく，再び，特殊相対性理論を基礎におき，物質の影響をうけるものは $\overset{0}{g}_{ik}$ ではなく，それからの無限小のズレ γ_{ik} であると考える．座標系としては標準座標系をえらび，$\overset{0}{g}_{ik}=0$（$i \neq k$ のとき）となるようにする．また

$$\overset{0}{g}_{00} = 1, \qquad \overset{0}{g}_{11} = \overset{0}{g}_{22} = \overset{0}{g}_{33} = -1$$

となるように選ぶ．x^0 は時間，x^1，x^2，x^3 は空間の直交

座標を示す．また光速度は 1 となるように単位がえらばれている．

いま

$$\psi_i^k = \gamma_i^k - \gamma\delta_i^k \qquad \left(\gamma = \frac{1}{2}\gamma_i^i\right)$$

によって新たに ψ_i^k を考える．ここで条件

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0 \tag{42}$$

をつけても，これはこれからの議論になんらの制限を加えるものではないことをまず注意したい．いま仮に（42）が成立していなかったとすれば，いま用いている座標系をわずかに変化させることによって（42）が成立するようにできるからである．新しい座標系 $\bar{x}$ への座標変換の式

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$$

は一般に 4 個の未知関数 ξ^i を含む．ここではこの ξ^i はすべて γ と同程度の無限小量とする．新しい座標系を用いた計量の係数 $\bar{g}_{ik}$ は，以前に求めた公式により

$$g_{ik}(x) - \bar{g}_{ik}(x) = g_{ir}\frac{\partial \xi^r}{\partial x^k} + g_{kr}\frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}\xi^r.$$

したがって（γ と ξ の積は無視する）

$$\gamma_{ik}(x) - \bar{\gamma}_{ik}(x) = \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i},$$

$$\gamma(x) - \bar{\gamma}(x) = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = \Xi.$$

そこで

$$\frac{\partial \gamma_i^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \bar{\gamma}_i^k}{\partial x^k} = \Box \xi_i + \frac{\partial \Xi}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} - \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial x^i} = \frac{\partial \Xi}{\partial x^i}.$$

ここで任意の関数 f に対して $\Box f$ は

$$\Box f = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\overset{0}{g}{}^{ik}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 f}{(\partial x^0)^2} - \left\{\frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial x^3)^2}\right\}$$

で定義される．そこでもし

$$\Box \xi_i = \frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k}$$

を満足するように ξ^i を選べば，新しい座標系では求める条件（42）が満足される．上の ξ^i の方程式はたとえば遅延ポテンシャルを使ってその解を求めることができる（第 III 章本書上巻 332-333 ページ参照）．このようにして，ローレンツ変換による不定性だけを度外視するならば，1 次の無限小量ばかりでなく 2 次の無限小量（つまり γ の 2 次の程度）まで考慮にいれた範囲で，座標系は完全に決定される．座標系のこのような不変な規格化が可能であるということは一驚に値する．

これから曲率テンソルの成分 R_{ik} を計算しよう．$\left\{\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right\}$ は無限小量であるから，その 1 次の量だけに限ってよい：

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^r}\left\{\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\begin{matrix} ir \\ r \end{matrix}\right\}.$$

ところで

$$\begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{ir}}{\partial x^k} + \frac{\partial \gamma_{kr}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^r}\right).$$

したがって

$$\left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_i^r}{\partial x^k} + \frac{\partial \gamma_k^r}{\partial x^i} - \overset{0}{g}{}^{rs} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^s}\right).$$

そこで (42)，あるいはこれと同等な

$$\frac{\partial \gamma_i^k}{\partial x^k} = \frac{\partial \gamma}{\partial x^i}$$

を考慮すると，

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{1}{2}\Box \gamma_{ik},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{ \begin{matrix} ir \\ r \end{matrix} \right\} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^i \partial x^k}.$$

そこで

$$R_{ik} = -\frac{1}{2}\Box \gamma_{ik}$$

となる．これから $R = -\Box\gamma$ が導かれる．したがって

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = -\frac{1}{2}\Box \psi_i^k.$$

それゆえ，重力場の方程式は

$$\frac{1}{2}\Box \psi_i^k = -\kappa T_i^k \qquad (43)$$

となる．これは遅延ポテンシャルを使ってすぐに積分できる（本書上巻 332-333 ページ参照，ここでも前と同じ記号を使う）：

$$\psi_i^k = -\int \frac{\kappa T_i^k(t-r)}{2\pi r} dV.$$

この式からつぎのことがわかる：**物質の分布の任意の変化は，重力場にも変化を引きおこす．後者は空間の中を光速度をもって伝播する．**したがって質量が振動すれば，重力波を生みだす．しかしわれわれの見渡す自然界では，観測にかかるほどの重力波を生みだすに十分な程度の大きな質量変化は未だどこにも発見されていない．

(43) は，電磁場の方程式

$$\Box\varphi^i = s^i$$

に完全に対応するものである．電流 s^i は

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0$$

を満足するから，電磁場のポテンシャル φ^i は副条件 $\partial\varphi^i/\partial x^i = 0$ を満足するように制限された．これと同様に，弱い重力場の場合にも，物質のエネルギー・テンソル T_i^k が

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$$

を満足するから，重力場のポテンシャル ψ_i^k に対して副条件 (42) を導入することができる．

物質が存在しない空間では，**平面重力波**が伝播する．光学の場合にならって，

$$\psi_i^k = a_i^k \cdot \exp[i(\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)]$$

とおく．a_i^k, α_i は x に無関係な任意の定数で，α_i は $\alpha_i\alpha^i =$

0 の条件を満足するものとする．$\alpha_0=\nu$ はこの波の振動数，$\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3=$一定 はある瞬間における一定の位相をもった平面を示す．方程式 $\Box \psi_i^k=0$ は $\alpha_i \alpha^i=0$ のために恒等的に満足される．副条件（42）は

$$\alpha_k a_i^k=0 \tag{44}$$

となる．いま波の進行方向を x^1 軸にとれば，

$$\alpha_2=\alpha_3=0, \qquad \alpha_0=-\alpha_1=\nu$$

となる．また（44）は

$$a_i^0=a_i^1, \quad \text{または} \quad a_{0i}=-a_{1i}. \tag{45}$$

そこで定数の成分をもつ 2 階対称テンソルの空間部分

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

だけを与えれば十分である．なんとなれば添字 0 をもつ成分は（45）によって上の空間部分の成分から，その値が決定されるから．一方空間部分の成分に関しては，対称性以外には何の制限も存在しない．これは波の進行方向を特別にとること（すなわち x^1 軸とした）により三つの部分に分かれる：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

そこでここに考えているテンソル波も上のような三つの

互いに独立な波に分かれる．すなわち左から，縦・縦波，縦・横波，および横・横波（これを略して $L{\cdot}L$ 波，$L{\cdot}T$ 波，および $T{\cdot}T$ 波と記す）である．

重力場の方程式の近似的積分法について，ティリングは二つの興味深い応用をおこなった [18]．彼は大きな重い中空の球が自転しているとき，この球の中心近くにある質点の運動に対して，この球殻の自転がどのような影響を与えるかを，上述の近似法を用いてしらべた．そして予想通り，この影響は遠心力に似た作用をもつことをみいだした．しかしこの他になお，もうひとつの力が存在することも発見した．ちょうど，遠心力がすべての物体を回転軸から遠ざけようとするのと同じように，この新たに発見された力は，物体を，自転に対する赤道面の方に引きこもうとする作用をもつ．ティリングの第二の仕事はレンズとの協同研究である．それは，重力場の源となっている物体，たとえば太陽（または木星）の自転がその惑星（または木星の月）にどのような影響をあたえるかを調べたものである．木星の5カ月の間に，木星の自転によっておこされた摂動が，その月にあたえる影響は，彼等の結果によれば，観測可能な程度の大きさになる．

§§ 31，32 では重力場の方程式の近似解法について述べた．そこでは，線形の項にかぎることによって，積分を求めることが可能となった．そこでこれから厳密解を求めることを考えよう．しかしその場合，ただ静的重力場に制限する．

§ 33 真空中における静的球対称重力場 [19]

静的重力場では距離の基本形式は

$$ds^2 = f^2(dx^0)^2 - d\sigma^2$$

である．ここで $d\sigma^2$ は 3 次元空間座標 x^1, x^2, x^3 の正定符号の二次形式である．また光速度 f は x^1, x^2, x^3 だけの関数である．もしこの現実の空間を，x^1, x^2, x^3 を直交座標とするユークリッド空間（写像空間）につぎのように写像できる場合には，この計量場は球対称といわれる．この条件とは 1）写像空間の原点 $\bar{\mathrm{O}}$ から，現実の空間内の点 $\mathrm{P}=(x)$ の写像点 $\bar{\mathrm{P}}$ までの距離（写像空間の計量を用いた距離）を

$$|\bar{\mathrm{O}}\bar{\mathrm{P}}| = r = \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}$$

とするとき，$f(x)$ は r だけの関数であること．2）現実の空間の中の点 $\mathrm{P}=(x)$ における線素の長さを $d\sigma$，写像空間内におけるこの線素の写像のユークリッド的長さを $d\sigma_0$ とする．すなわち

$$d\sigma_0^2 = (dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2,$$

$$d\sigma^2 = \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}\, dx^i dx^k.$$

いま写像空間において線素 (dx^i) の方向が $\overrightarrow{\bar{\mathrm{O}}\bar{\mathrm{P}}}$ と平行，または垂直の時，そのいずれに対しても $d\sigma/d\sigma_0$ の値は $\overrightarrow{\bar{\mathrm{O}}\bar{\mathrm{P}}}$ の長さ r だけによってきまり，$\overrightarrow{\bar{\mathrm{O}}\bar{\mathrm{P}}}$ の方向には無関係であること．以上の条件から，$d\sigma^2$ には

$$d\sigma^2 = k\{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\}$$
$$+ l(x^1dx^1 + x^2dx^2 + x^3dx^3)^2 \qquad (46)$$

の形だけが許される．ただし上の k, l はともに r だけの関数である．実際，線素 (dx^i) が $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と平行のときの比を $(d\sigma/d\sigma_0)_{/\!/}$，垂直のときを $(\ )_\perp$ で示せば

$$\left(\frac{d\sigma}{d\sigma_0}\right)_{/\!/} = \sqrt{k+lr^2}, \qquad \left(\frac{d\sigma}{d\sigma_0}\right)_\perp = \sqrt{k}$$

となって，たしかにどちらも r だけの関数になっている．ここで r に対する尺度を適当にえらんで $(\ )_\perp$ の値を 1，つまり $k=1$ とすることができる．これを解析的に行なうには，つぎのようにすればよい：すなわち標準形（46）をこわさないように，空間座標 x^i に

$$x^{i*} = \frac{r^*}{r}x^i \qquad (47)$$

という変換をほどこす．ここで r^* は r の任意の単調関数とする．この関数の形を適当にきめれば，$k=1$ となる新しい座標変数 x^{i*} がきまる（それには $r^* = \sqrt{k}r$ ととればよい）．そこでこのように規格化した座標系をこれからの計算の基礎にとることにする．したがって

$$ds^2 = f^2(r)dt^2 - d\sigma^2,$$
$$d\sigma^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \qquad (48)$$
$$+ l(r)(x^1dx^1 + x^2dx^2 + x^3dx^3)^2.$$

あるいは§31の記号を使えば

$$\gamma_{ik} = -g_{ik} = \delta_{ik} + lx^i x^k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

となる．なお $(d\sigma/d\sigma_0)_{/\!/}$ を h とおく．すなわちつぎのように記す：

$$h^2 = 1 + l \cdot r^2.$$

さてこれから，$\boldsymbol{T}_i^k$ が 0 である場合の，重力場の方程式を満足する球対称場を求めよう．この場合の場の方程式は変分原理

$$\delta \int \boldsymbol{G} dx = 0$$

に集約されている．**われわれが求める重力場は静止している質量をとりまいて，それを中心に球対称に分布している重力場である**．ここで変分原理を利用するに際して，われわれが出発点としてとった ds^2 の標準形式（48）がそのままに保たれるような変分のみを考えることにする．したがって 10 個の成分 g_{ik} をすべて互いに独立に変化させるかわりに，ただ f と l だけについて，しかも r のみに依存する無限小変分 $\delta f(r)$，$\delta l(r)$ を扱うことにする．このように制限された変分を扱うためには，（48）のような標準形式に対して $\int \boldsymbol{G} dx$ を計算しておけば十分である．いま $'$ は r についての微分を示すとすれば，

$$\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^a} = l' \frac{x^a}{r} x^i x^k + l(\delta_{ai} x^k + \delta_{ak} x^i)$$

となる．そこで

$$-\begin{bmatrix} ik \\ a \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{x^a}{r} l' x^i x^k + l \delta_{ik} x^a, \qquad (i, k, a = 1, 2, 3).$$

さらに

$$\gamma^{ik}=\delta_{ik}-\frac{l}{h^2}x^i x^k=-g^{ik}$$

を使うと

$$\begin{Bmatrix} ik \\ a \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^a}{r}\frac{l'x^i x^k+2lr\delta_{ik}}{h^2}.$$

ここで球対称であることに着目すれば，$\boldsymbol{G}$ の計算には点 $x^1=r$，$x^2=x^3=0$ における $\boldsymbol{G}$ の値を求めれば十分である．このような点では上に求めた三指標記号はつぎのようになる：

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}=\frac{h'}{h},\qquad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 33 \\ 1 \end{Bmatrix}=\frac{lr}{h^2}.$$

その他はすべて 0 である．また添字 0 をもつ三指標記号は § 31 によって

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 01 \\ 0 \end{Bmatrix}=\frac{f'}{f},\qquad \begin{Bmatrix} 00 \\ 1 \end{Bmatrix}=\frac{ff'}{h^2},\qquad \text{その他}=0.$$

また g_{ik} については，

$$g_{00}=f^2,\qquad g_{11}=-h^2,\qquad g_{22}=g_{33}=-1,$$

$$g_{ik}=0\quad(i\neq k).$$

g^{ik} は

$$g^{00}=\frac{1}{f^2},\qquad g^{11}=-\frac{1}{h^2},\qquad g^{22}=g^{33}=-1,$$

$$g^{ik}=0\quad(i\neq k).$$

ところで $\boldsymbol{G}$ の定義（31）から $\boldsymbol{G}$ はつぎのようになる：

$$-\frac{2}{\sqrt{g}}\boldsymbol{G}=$$

$$\frac{1}{f^2}\left[\begin{Bmatrix}00\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right)-2\begin{Bmatrix}01\\0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}00\\1\end{Bmatrix}\right]$$

$$-\frac{1}{h^2}\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right)-\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right]$$

$$-\left[\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right)\right]$$

$$-\left[\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right)\right].$$

第 1, 2 行は一緒にすると

$$\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}\right)\left[\frac{1}{f^2}\begin{Bmatrix}00\\1\end{Bmatrix}-\frac{1}{h^2}\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}\right].$$

この [ ] は上に求めた三指標記号の値を代入すると 0 になる．ところで §18，(60) によって $\Delta=\sqrt{g}=hf$ に対して

$$\sum_{i=0}^{3}\begin{Bmatrix}1i\\i\end{Bmatrix}=\frac{\Delta'}{\Delta}$$

がなりたつから，上の $\boldsymbol{G}$ の第 3，第 4 行の和は

$$=-\frac{2lr}{h^2}\frac{\Delta'}{\Delta}$$

となる．いま $\boldsymbol{G}$ の 4 次元積分のうち，x^0 については，あるきまった有界の時間領域にわたって積分を行ない，空間積分については，二つの同心球面によってはさまれた，部分について積分することにする．そこで 4 次元体積素片は

$$dx=dx^0\cdot d\Omega\cdot r^2dr \qquad (d\Omega=\text{立体角の積分要素})$$

となる．そこでわれわれが解くべき変分方程式は

$$\delta\int \boldsymbol{G} r^2 dr = 0$$

となる．あるいは

$$\frac{lr^3}{h^2} = \frac{lr^3}{1+lr^2} = \left(1-\frac{1}{h^2}\right)r = w$$

とおけば

$$\delta\int w\Delta' dr = 0$$

がわれわれのとくべきものである．ここで w と Δ を任意に変化させる r の関数と考えてよい．

そこで w の変分からまず

$$\Delta' = 0, \quad \text{あるいは} \quad \Delta = \text{一定}$$

となる．ここで時間の単位を適当にとって

$$\Delta = hf = 1$$

となるようにする．つぎに部分積分によって

$$\int w\Delta' dr = [w\Delta] - \int w'\Delta dr.$$

そこで Δ の変分を考えれば

$$w' = 0, \quad \text{あるいは} \quad w = \text{一定} = 2m.$$

w の定義と $\Delta=1$ から

$$\boxed{f^2 = 1-\frac{2m}{r},\ h^2 = \frac{1}{f^2}}. \tag{49}$$

この解を実際に，重力場の方程式に代入してみれば，これがたしかにすべての方程式を満足していることを確めるこ

とができる．しかし，たとえ 10 個の g_{ik} について，すべてを勝手に変化させても，(49) 以外になんらの新しい条件式もでてこないことは，計算をやらなくてもつぎの考察によってわかる．まず§31 により，変分式

$$\delta\int \boldsymbol{G}dx=-\frac{1}{2}\int[\boldsymbol{G}]_{ik}\delta g^{ik}dx$$

の中にでてくる曲率テンソル R_{ik} もまた，g_{ik} と同じように，静的な形をしている：つまり $R_{0i}=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ であり，さらにすべての成分は $x^0=t$ に無関係である．第二に，写像ユークリッド空間の原点 $\bar{\mathrm{O}}$ のまわりのユークリッド的回転に対してテンソル場 g_{ik} $(i,\ k=1,\ 2,\ 3)$ が不変であるということから，g_{ik} から一意的にきまる R_{ik} に対しても同じ不変性がでてくる；換言すれば，R_{ik} も g_{ik} と似た形をもつことが導かれる．すなわち

$$R_{ik}=K\delta_{ik}+Lx^ix^k,\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3).$$

ここで R_{00}, K, L, はただ r だけの関数である．そこでこの 3 個の r のみの未知関数をきめるのには，f, k, l（標準形（46）の場合）の変分による 3 個の場の方程式で十分である．ところで写像空間内の半径 r の球面上の点をその半径方向に変位させて半径が $r+\delta r$ (δr も r の関数）の球面上の点に移るような無限小変形を写像空間において行なったとすれば，R_{ik} も g_{ik} も依然として標準形式のままである．ただ f, k, l だけが δr に応じて，$\delta f, \delta k, \delta l$ だけ変化する．もし r のある限られた範囲でだけ $\delta r\neq 0$ で，それ以外の r の値に対しては $\delta r=0$ とすれば，

$$\delta\int \boldsymbol{G}dx=\delta\frac{1}{2}\int R\sqrt{g}dx=0$$

がなりたつ．なんとなれば R は不変曲率であるから[15]．この事情を考慮すれば，常に $\delta k=0$ という制限のもとに変分原理を使っても，それで十分であることが納得できよう．

以上で，われわれの問題は完全に解かれた．ここでは時間の単位は無限遠で光の速さが $=1$ となるようにきめられている．長さのディメンションをもつ定数 m は，重力場の源となっている物体の**重力半径**と呼ばれる．これは，源の物体を中心として，そのまわりにひろがっている計量場の偏向（ユークリッド的計量からのズレ）の強さを与える．もし cm と秒を単位にとれば，源の物体から十分にはなれた場所における光の速さは $=1$ ではなくて $=c$ となる．またわれわれの f は，cf におきかえねばならない．また距離 r が m より大きければ，

$$cf=c+\frac{1}{c}\Phi,\qquad \Phi=-\frac{c^2m}{r}$$

となる．これとニュートンの万有引力の法則による Φ：

15) 訳者注：この変分式 $=0$ はこの積分が上述のような変形に対して不変であるために導かれたもので，ハミルトン原理を使ったものではない．したがってこれは一種の恒等式であり重力場の方程式とは異なる．つまり f, k, l のそれぞれの変分から導かれる 3 個の場の方程式の間の恒等的関係を示すものである．したがって，この 3 個の方程式のなかのどれか 1 個は不要である．それゆえ，たとえば k を固定してよい．

$$\text{重力ポテンシャル} = \Phi = -\frac{M}{r}$$

を比べると，$M = mc^2$ によって結ばれる．星の運動の観測から，重力を生みだしている質量（能動的重力質量）M（あるいは m）の値を推論することができる．たとえば，太陽に対してはおよそ $m = 1.47\ \mathrm{km}$ また地球は $m = 5\ \mathrm{mm}$ である．しかし，物体 1 が物体 2 に及ぼす重力は，2 が 1 に作用する重力と大きさが等しい（作用と反作用の等しいこと）という原理を満たすために，ニュートンは，M がその慣性質量に比例すると仮定した．本書では §37 においてアインシュタインの理論をもとにして重力を生みだす質量とその慣性質量の間の関係を確立してみせる．ところで f^2 は負になるわけにはいかないから，ここに導入された座標系を用いるかぎり，物質が存在しない真空領域のなかで，$r > 2m$ の領域に対してのみ，この解は意味をもつ．

上の議論では $\left(\frac{d\sigma}{d\sigma_0}\right)_\perp = 1$ という条件によって長さの単位が規格化された．しかし他の規格を用いる方が時には便利な場合もある．$l = 0$ という規格は特に簡単である．この場合には現実の空間は写像ユークリッド空間と共形（konform）となる．またこの時は $r =$ 一定の球面の半径方向の線素の比 $(d\sigma/d\sigma_0)_{/\!/}$ も，球面の接平面上の線素に対する $(d\sigma/d\sigma_0)_\perp$ も等しくなる．(47) によりもう一度規格の変更 $x \to x^*$ を行なえば，

$$\left(\frac{d\sigma_0}{d\sigma_0{}^*}\right)_{/\!/} = \frac{dr}{dr^*}, \qquad \left(\frac{d\sigma_0}{d\sigma_0{}^*}\right)_\perp = \frac{r}{r^*}$$

となる．また x 空間（現実空間）で，$k=1$，$l\neq 0$ というもとの規格を使ったときは

$$\left(\frac{d\sigma}{d\sigma_0}\right)_{/\!/}=h(r),\qquad \left(\frac{d\sigma}{d\sigma_0}\right)_{\perp}=1.$$

そこで両者を一緒にして，

$$\left(\frac{d\sigma}{d\sigma_0{}^*}\right)_{/\!/}=\left(\frac{d\sigma}{d\sigma_0{}^*}\right)_{\perp},\quad \text{すなわち}\quad h\frac{dr}{dr^*}=\frac{r}{r^*}$$

がなりたつように r^* をきめれば，現実の空間に共形な，ユークリッド写像空間（x^* がその直交座標である）に到達する．そこで上の式に（49）を代入すると，r^* と r の関係は

$$\frac{dr}{\sqrt{r(r-2m)}}=\frac{dr^*}{r^*}$$

となる．これを積分すれば，

$$\frac{r-m}{m}=\frac{1}{2}\left(ar^*+\frac{1}{ar^*}\right).$$

そこで無限遠点で，長さの比 $d\sigma/d\sigma_0$ が 1 になるためには，上の積分定数 a を $=\dfrac{2}{m}$（これは新しい r^* に対する単位の決定である）にえらべばよい．この結果

$$r=r^*+m+\frac{m^2}{4r^*},\qquad \frac{r}{r^*}=\left(1+\frac{m}{2r^*}\right)^2,$$
$$f^2=\frac{r-2m}{r}=\left(\frac{r^*-\dfrac{m}{2}}{r^*+\dfrac{m}{2}}\right)^2$$

となる．これから新座標を示す * を省略することにし，線

素の大きさの比や，光の速さを新座標を使って書けば

$$\left.\begin{aligned}&\text{線素の大きさの比} = h = \frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \left(1+\frac{m}{2r}\right)^2\\&\text{光の速さ}\cdots\cdots f = \frac{1-m/2r}{1+m/2r}\end{aligned}\right\}. \qquad (49^*)$$

いま，ひとつの無限に小さい剛体の物さしを，源の物体をとりまく重力場（上述の静的球対称場）の中の種々の位置においても，それは常に同じ長さ $d\sigma$ を示す．なぜならば，アインシュタインの定義によれば，世界の計量は，不変な長さをもつ物さしと，周期が一定の時計を使って物理学的に定義されたものであるから，物さしの長さが，その位置によらず一定なのは当然である．この無限小の物さしは世界の中に，その各部分の描く世界線によって，ひとつの帯を描く．この帯の幅を世界線に垂直な方向の計量基本形式 ds^2 を用いて測った大きさが $d\sigma$ である．したがって剛体の物さしの長さに直接ある一定の値を賦与することを基礎として作られた“自然幾何学”（つまりこの現実の自然界においてなりたっている幾何学）は，重力の源点をとりかこむ領域では，上に述べた（49）のような具合にユークリッド幾何学とは異なる．この事情をつぎのように表現することはもちろん可能である：本当はユークリッド幾何学が成立している．しかしこの空間の中におかれた物さしは，それが r の方向（つまり写像空間における半径方向）におかれた時は，その長さが重力の影響をうけて，$\sqrt{1-\dfrac{2m}{r}}$ 倍に収縮

する．これに対して，物さしが半径に垂直の方向におかれたときは，その長さは重力のないときと変わらないとする．そこで物さしの本当の長さは $d\sigma$ ではなくて，$d\sigma_0$（ただし $l \neq 0$, $k=1$，というはじめの規格を用いた場合の写像空間の線素の長さ）である．重力の影響により物さしが r 方向では収縮するため，正しい値を与えてくれないことを考慮して，r 方向の実測値を修正すれば，［つまり $(dr)^2$ の分母にある $1-(2m/r)$ を取りのぞけば］はじめてユークリッド幾何学が成立する．たとえば不均一な温度分布をしている平らな板を考えよう．これは熱的に定常状態にあるとする．この板の寸法を測るために，板の上の各点に同じ長さの物さしをおく．物さしは，それがおかれた板の部分と熱的に平衡にあるとする．したがって場所ごとに物さしの温度は異なり，その結果，物さしの長さも場所ごとに違っている〔ただし板自身はその各部分の長さが熱的変化をこうむらないとする．したがって，加熱前と同様に完全な平面であると仮定する：訳者注〕．この場合にも，上の重力場の中における“自然幾何学”と同様に，ユークリッド幾何学とはズレた“自然幾何学”が平板の上に作られる．それにもかかわらず，この平板の上ではユークリッド幾何学が成立しないと主張する人はいない．むしろ人々はこのズレは，測定に用いた物さしの熱膨張の結果であるという．同じように重力場の場合にも，ユークリッド幾何学は依然としてなりたつものとみなし，それがなりたたないように見えるのは物さしが重力の影響で収縮するからだと考える方が，

ずっと簡単で，また合理的であるとはいえないだろうか？たしかにそのような見かたも可能である．――ここで不均一な温度分布をしている平板の場合に，物さしの収縮の様子は物さしの材料となっている物質により異なる．これに対して重力による物さしの収縮は物さしの材料がなんであるかには無関係である．この事情をたとえ無視しても，――熱膨張の場合と重力の場合ではひとつの本質的なちがいが存在する．重力場の場合には，座標系について第二の規格を用いるならば，つぎのような仮定のもとに“自然幾何学”をユークリッド的になるようにさせることができる．すなわち，すべての物さしは，それを半径方向に置こうが，あるいは半径に垂直な方向に置こうとも，常に重力の源点から r の“距離”［つまり $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=r^2$ となる点］の点では，$1/\left(1+\dfrac{m}{2r}\right)^2$ 倍に収縮するものと仮定する．したがって**物さしの読み（実測値）を補正する方法には無限に多数の方法があり，それらはどれも同じように正しい方法とみなすことができる．**これらの補正値を使えば，どの方法に従っても，すべて，真実の幾何学と考えられているユークリッド幾何学が成立するようになる．このような無数に在る補正方法のなかから，ただひとつの方法だけを，正当なものとして特に取りだすための根拠は存在しない．ただまったくのわれわれの好悪でこれをきめることができるにすぎない．アインシュタインの考えは，具体的に存在している対象の記述に，このような恣意的な，余計な要素を持ちこむことを排除するというものである．これに対し

て温度分布の場合は事情がまったく異なる．すなわちその場合には唯一の，物理的に絶対的な補正の方法が存在する．それはすなわち一様な温度分布の場合へ帰着させるという方法である．

重力の源点の近くにおける幾何学のユークリッドからのズレを直観的にわかりやすくするために，源点を通る平面を考えよう．一方，ユークリッド空間の中にひとつの回転面（すなわちある直線について軸対称な曲面）を考える．この面の上の線素の長さの様子が，重力場内に考えた上述の平面上の長さの事情と等しくなるようにするには，どのような形の回転面を作ればよいかを考えてみる．ユークリッド空間の中に直交座標系 x^1, x^2, z を設け，上述の回転面の回転軸を z 軸にとる．またこの面上の任意の点から z 軸までの距離を r $(=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2})$，その点の z 座標は $z=F(r)$ であたえられているとする［つまり $z=F(r)$ はこの回転面の方程式である］．いまこの面上の点を x^1, x^2 平面上に垂直に射影したとすれば，回転面上で $r=$ 一定（あるいは $z=$ 一定 の切口）の円周の接線上にある線素の長さと，その影像のそれの比は明らかに 1 である．また射影面上で半径方向にある線素に対応する回転面上の線素の長さと，その射影の比 h は

$$h=\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2}$$

であたえられる．これが（49）と一致するためには

$$\frac{dz}{dr} = F'(r) = \sqrt{\frac{2m}{r-2m}}$$

とすればよい．これを積分すれば

$$z = F(r) = \sqrt{8m(r-2m)}.$$

したがって重力場内で，その源点を通る平面上の幾何学は，3 次元ユークリッド空間における回転放物面

$$z = \sqrt{8m(r-2m)}$$

の上でなりたつ幾何学と同じである[16)]．

さてこれから原点 O のまわりに球対称に分布している物質が，電荷をもっている場合を考えよう．もちろん，電荷の分布も O を中心として球対称であるとする．

電荷をもった球は，その周囲に球対称の重力場を作るばかりでなく，さらに，球対称な静電場も作る．これらは互いに影響をおよぼしあうから，これらの場は同時に連立的に

---

16) 訳者注：いま $x^1 = r\sin\theta\cdot\cos\varphi$，$x^2 = r\sin\theta\cdot\sin\varphi$，$x^3 = r\cos\theta$ とおき，重力場内で $\varphi =$ 一定 という平面上の線素の（長さ)^2 を求めれば（49）により

$$d\sigma^2 = \frac{(dr)^2}{1-\dfrac{2m}{r}} + r^2(d\theta)^2.$$

一方，回転放物面上の点の座標は
$x^1 = r\cos\theta$，$x^2 = r\sin\theta$，$x^3 = z = F(r) = \sqrt{8m(r-2m)}$.
そこでこの面上の線素の (長さ)^2 は

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 + \frac{2m}{r-2m}(dr)^2$$
$$= r^2(d\theta)^2 + \frac{r}{r-2m}(dr)^2$$

となって，重力場内の幾何学と一致する．

決定されねばならない [20]．質量も電荷も存在しない真空領域では，作用積分はこの場合にはつぎの形をしている：

$$\int\left\{w\Delta' - \frac{\kappa}{2}\frac{(\varphi')^2 r^2}{\Delta}\right\}dr.$$

これは平衡状態では定常値をもつ．φ は静電ポテンシャル，その他の記号は前と同じ意味をもつ．電場の作用積分は，古典論にしたがって電場の強さの 2 乗であたえられる．電荷がなかった場合と同様に，w の変分によって

$$\Delta' = 0, \qquad \text{すなわち} \quad \Delta = \text{一定} = 1$$

となる．φ の変分からは

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\varphi'}{\Delta}\right) = 0.$$

したがって

$$\varphi = \frac{e}{r}$$

この結果からわかるように，静電ポテンシャルは，重力場が存在しない場合と同じ形をしている．定数 $4\pi e$ は電場を作っている源の総電荷である．最後に Δ の変分をとれば，

$$w' - \frac{\kappa}{2}\frac{(\varphi')^2 r^2}{\Delta^2} = 0.$$

したがって

$$w = 2m - \frac{\kappa e^2}{2r}, \qquad \frac{1}{h^2} = f^2 = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\kappa e^2}{2r^2}. \tag{50}$$

m は，前と同様に，中心の物質の重力半径である．ここに新しくでてきた電荷に関係する項は静電場のエネルギーの

重力的作用にもとづくものである．

§ 34 太陽重力場内における光線と惑星の運動

太陽の作る重力場に対してわれわれが求めた公式 (49) または (49)* を応用してみよう．太陽のそばを通過する光線の彎曲を計算するためには，公式 (49)* を使って，直交座標系をもつ写像空間に共形写像をするのが便利である．光線の進路は，積分

$$\int \frac{d\sigma}{f} = \int n d\sigma_0$$

が定常値をもつという条件からきまる．ここで n は

$$n = \frac{h}{f} = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \Big/ \left(1 - \frac{m}{2r}\right)$$

である．この式から，つぎのようにいえる：太陽の重力場が光線に与える影響は，太陽からの距離 r に応じて上のように変化する屈折率 n をもつ媒質によって太陽がとりかこまれている場合，この中を通る光に対する媒質の影響と完全に一致する．光の進路のすべての点で，太陽からその点までの距離 r は，m に比べて非常に大きいから，十分によい近似として

$$n = 1 + \frac{2m}{r}, \qquad n^2 = 1 + \frac{4m}{r}$$

とおくことができる．上の n の式からわかるように，光線の彎曲については，その半分は重力の源の光速度に対する

影響（あるいは静的重力ポテンシャル）にもとづくが，残りの半分は空間の幾何学（h）に対する重力の影響である．もし，光に重量があるとして，ニュートンの理論に従って光の軌道を計算したとすれば（つまり無限遠点で光速度 c に等しい速さをもつ物体の軌道を計算したとすれば），ただ上述の第一の影響だけを考えにいれたことになる．実際の計算結果でも，ニュートンの引力の法則による結果はアインシュタインの理論から導かれる彎曲角のちょうど，半分になる．いま重力ポテンシャル Φ の影響をうけて運動している物体があるとし，この無限遠点（すなわち $\Phi=0$ となる場所）における速さを $=c$ とすれば，この物体の運動に対する作用原理は，ニュートンの力学によれば，

$$\delta\int\sqrt{1-\frac{2\Phi}{c^2}}d\sigma_0=0$$

となる．ここでも再び $\int nd\sigma_0$ の形の積分が導かれた．しかしここの n は

$$n^2=1-\frac{2\Phi}{c^2}=1+\frac{2m}{r}$$

である．もしアインシュタインの理論の与える数値の正しいことが実験的にたしかめられれば，重力を生みだす質量は，同時に，その物質をとりかこむ空間の長さの定義にも（アインシュタインの理論に示されるような）影響を与えるということに対して，ひとつの実験的証拠を手にいれたことになる．

光の進路を実際にきめるために，しばらく n の具体的形

にはふれず，$d\sigma = n d\sigma_0$ とおくことにする：したがって距離の基本形式が $d\sigma^2 = n^2 d\sigma_0^2$ の空間の測地線を扱うことになる．その基本方程式は

$$\frac{d}{d\sigma}\left(n^2 \frac{dx^i}{d\sigma}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial n^2}{\partial x^i}\sum_a \left(\frac{dx^a}{d\sigma}\right)^2,$$

または

$$\frac{d}{d\sigma_0}\left(n \frac{dx^i}{d\sigma_0}\right) = \frac{\partial n}{\partial x^i} = \frac{dn}{dr}\frac{x^i}{r}.$$

この後者からは，よく知られているように，“面積定理” を示す三つの積分が求まる：

$$\cdots\cdots, \cdots\cdots, \ n\left(x^1 \frac{dx^2}{d\sigma_0} - x^2 \frac{dx^1}{d\sigma_0}\right) = \text{一定}.$$

この定理から，光線はひとつの平面上にあることが導かれる．そこでこの平面を $x^3 = 0$ とする．この平面内に極座標 r, φ を導入すると，上の “面積定理” は

$$n r^2 \frac{d\varphi}{d\sigma_0} = \text{一定} = R.$$

または $d\sigma_0^2 = dr^2 + r^2 (d\varphi)^2$ を使って，σ_0 を消去すると

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{n^2}{R^2}.$$

r のかわりに $\rho = 1/r$ を使えば

$$\left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2 + \rho^2 = \frac{n^2}{R^2}. \qquad (51)$$

無限遠点では $n = 1$ となるから，R は太陽の中心 O から光線の進路のもつ二つの漸近線までの垂直距離（どちらに対

しても等しい）を示すことになる．または光を発射した恒星と点 O の間の見かけの距離を示す（なんとなれば，任意の曲線に対して，それが漸近線をもつとき，座標の中心から，この漸近線までの距離は $\rho=0$ における $\dfrac{d\varphi}{d\rho}$ の値によって与えられる）．ところでニュートンの理論では，n^2 は厳密につぎの形になる．またアインシュタインのときは十分によい近似で同様に同じ形になる：

$$n^2=1+\alpha\rho : \alpha=2m \text{（ニュートン）},$$
$$\alpha=4m \text{（アインシュタイン）}.$$

(51) によれば，n^2 を上のようにとるときは光は双曲線を描く．その場合の彎曲角は $\dfrac{\alpha}{R}$ で与えられる．したがってこの角は太陽の中心から星までの見かけの距離 R に逆比例する．さらにアインシュタインの答はニュートンのそれのちょうど 2 倍になる．この両理論のどちらが正しいかという質問に対してソブラル，およびプリンシペにおける観測では，明らかにアインシュタインの方に軍配があがった．

つぎに重力場のなかにおける惑星の運動を計算するために，今度は最初の規格（すなわち $k=1$，$l\neq0$）を用いることにする．したがって§33 の，この規格にもとづく諸関係式を利用する．惑星の世界線は測地線の方程式

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ i\end{matrix}\right\}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0$$

であたえられる．この $i=0$ としたものは静的重力場では，エネルギー積分

$$f^2\frac{dx^0}{ds}=\text{一定}$$

を与える．s の定義

$$\left(f\frac{dx^0}{ds}\right)^2=1+\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2$$

という関係式を使えば，上のエネルギー積分は

$$f^2\left[1+\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2\right]=\text{一定}$$

となる．球対称の重力場では，上の測地線の方程式の $i=1,2,3$ は（§33 であたえた三指標記号の値から容易にわかるように）

$$\frac{d^2x^1}{ds^2}:\frac{d^2x^2}{ds^2}:\frac{d^2x^3}{ds^2}=x^1:x^2:x^3$$

という比例式を満足する．したがってまた“面積定理”

$$\cdots\cdots,\cdots\cdots,\ x^1\frac{dx^2}{ds}-x^2\frac{dx^1}{ds}=\text{一定}$$

が導かれる．ニュートンの理論からの結論とくらべて，異なる点は，上の“面積定理”にでてくる面積速度は，宇宙時間についての速度ではなく，惑星の固有時間を用いた場合の面積速度が一定ということである．この定理の結果，惑星の運動はひとつの平面内にある．そこでその平面を座標面 $x^3=0$ にとる．そしてこの面内にまた極座標 r,φ を導入して，

$$x^1=r\cos\varphi,\qquad x^2=r\sin\varphi$$

とおけば，上の“面積定理”は

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = \text{一定} = b \tag{52}$$

となる．一方

$$d\sigma^2 = h^2 dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

であるから，これとさきに求めたエネルギー積分を一緒にして

$$f^2\left\{1 + h^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right\} = \text{一定}.$$

$fh=1$ を使い，さらに f^2 に（49）を代入すると

$$-\frac{2m}{r} + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r(r-2m)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -E = \text{一定} \tag{53}$$

となる．ニュートンの理論によるエネルギーの式にくらべて（53）の異なる点は，左辺の最後の項が，ニュートンでは $r^2(d\varphi/ds)^2$ となるのに，（53）では $r(r-2m)(d\varphi/ds)^2$ となっていることである．

これからさきの扱いかたは，まったくニュートンの理論の場合と同様である．すなわち（52）を（53）に代入して $\dfrac{d\varphi}{ds}$ を消去すると，

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{2m}{r} - E - \frac{b^2(r-2m)}{r^3}.$$

あるいは r のかわりに $\rho = 1/r$ を使えば

$$\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = 2m\rho - E - b^2\rho^2(1-2m\rho).$$

そこで惑星の軌道を導くために，（52）を 2 乗したもので上の両辺を割って固有時間を消去すると

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2m}{b^2}\rho - \frac{E}{b^2} - \rho^2 + 2m\rho^3.$$

ニュートンの場合には右辺の最後の項がない．惑星の場合には上にでてきた係数の数値的事情から，上の右辺の ρ についての三次式は 3 個の正の実根 $\rho_0 > \rho_1 > \rho_2$ をもつ．したがってこの右辺は

$$= 2m(\rho_0 - \rho)(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)$$

のように書きあらわされる．したがって ρ は，$\rho_1 > \rho > \rho_2$ の範囲で変動することだけが可能である．ρ_0 は他の 2 根にくらべて非常に大きい．そこでニュートンの理論にまねて，

$$\frac{1}{\rho_1} = a(1-e), \qquad \frac{1}{\rho_2} = a(1+e)$$

とおく．この a を“楕円”の長軸半径，e を離心率とよぶことにする．上の定義から

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{2}{a(1-e^2)}.$$

また，上式の右辺の ρ^2 の係数から

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 = \frac{1}{2m}.$$

上の微分方程式をとけば，φ は ρ について第一種の楕円積分で表わされる．したがって逆に ρ は φ を変数とする楕円関数で表わされる．運動の様子は，球面振子のそれとまったく同じタイプである．そこで簡単な近似公式を得るために，ニュートンの理論において，ケプラー軌道の決定に用いられたのと同じような変数のかきかえを行なう：すなわち

$$\rho - \frac{\rho_1+\rho_2}{2} = \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\cos\theta$$

とおけば，

$$\varphi = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2m\left(\rho_0 - \frac{\rho_1+\rho_2}{2} - \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\cos\theta\right)}} \tag{54}$$

となる．この新しい変数では，近日点は $\theta=0, 2\pi, 4\pi, \cdots$ で表わされる．ある近日点（たとえば $\theta=0$）からつぎの近日点（$\theta=2\pi$）までに本当の方位角 φ がどれだけ増加するかは，上の積分公式で θ について 0 から 2π まで積分することにより与えられる．これは十分によい近似で

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2m\left(\rho_0 - \frac{\rho_1+\rho_2}{2}\right)}}$$

となる．なんとなれば（54）の被積分項を小さい量

$$\xi = \frac{(\rho_1-\rho_2)\cos\theta}{2\rho_0-(\rho_1+\rho_2)}$$

の冪（べき）級数に展開すれば，ξ の 0 次の項からの積分が上に与えたものである．また ξ の 1 次の項は

$$\int_0^{2\pi} \xi d\theta \propto \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0$$

のために 0 となる．ところで

$$\rho_0 - \frac{\rho_1+\rho_2}{2} = \rho_0+\rho_1+\rho_2 - \frac{3}{2}(\rho_1+\rho_2)$$

$$= \frac{1}{2m} - \frac{3}{a(1-e^2)}$$

であるから，求める φ の増加量は

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \dfrac{6m}{a(1-e^2)}}} \sim 2\pi \left\{ 1 + \frac{3m}{a(1-e^2)} \right\}.$$

したがって惑星がその軌道を一周するごとに，その近日点は

$$\frac{6\pi m}{a(1-e^2)}$$

だけ前進（惑星の運動方向に進むこと）する．ここで m は太陽の重力半径であるが，これはケプラーの第三法則によって，この惑星の公転の周期 T とその楕円軌道の長軸半径 a を使って

$$m = \frac{4\pi^2 a^3}{c^2 T^2}$$

のように表わされる．太陽に最も近い惑星，すなわち水星 [21] の場合には，上に与えた近日点の移動量は，精巧な天文学的観測装置をもってすれば観測可能である．公式 (54) から光線の彎曲をあらためて計算することはもちろん可能である．

§ 35　静的重力場の厳密解（つづき）

質量をもつ物体の内部の力学的構造が完全にわかっているとき，この物体内部の重力場の様子は，アインシュタイ

ンの理論によってはじめてそれを決定することができる．重力場の方程式のなかには力学的な条件が，特に静的な場合には平衡条件が含まれているからである．われわれが扱うことのできる最も簡単な例は，ひとつの一様な非圧縮性流体からできている物体の場合である．流体になんらの外力が働いていないとき，そのエネルギー・テンソルは§27によって

$$T_{ik} = \mu^* u_i u_k - p g_{ik}$$

で与えられる．ここで流体の微小部分の4元速度の共変成分が u_i $(u_i u^i = 1)$ である．スカラー p は圧力を示し，μ^* は一定の密度 μ_0 から $\mu^* = \mu_0 + p$ によって与えられる．いま

$$\mu^* u_i = v_i$$

を独立量として導入し，

$$L = \frac{1}{\sqrt{g}} \boldsymbol{L} = \mu_0 - \sqrt{v_i v^i}$$

とおくとき，v_i を固定し，g^{ik} について変分を考えれば，

$$\delta \boldsymbol{L} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{T}_{ik} \delta g^{ik}$$

となる．そこで重力場の方程式はこのような g^{ik} の変分によってつぎの式から導かれる：

$$\delta \int (\kappa \boldsymbol{L} + \boldsymbol{G}) dx = 0.$$

しかしこの作用積分に対して，v_i を独立量として，その変分をとっても，正しい流体力学的方程式を導くことがで

きない点に注意すべきである（正しい方程式のかわりに，$v^i/\sqrt{v_i v^i}=0$ が導かれる．この式はこれ以上どうにも仕様がないものである）．しかしエネルギーならびに運動量に対する保存則は実はすでに重力場の方程式の中に含まれている〔訳者注：流体の方程式を導きたくても，ここでは独立なベクトル量 $v_i(x)$ の微係数が $\boldsymbol{L}$ のなかに含まれていないので，それは無理である．しかし重力場の方程式から，必然的に，$\boldsymbol{T}_{ik}$ の保存則がでてくる．この 4 個の方程式が v_i のふるまいをきめる方程式，すなわち，v_i - 場の場の方程式であるというのが，アインシュタインの考えかたである〕．

静的な場合には $v_1=v_2=v_3=0$ であり，またすべての量は時間に無関係である．いま $v_0=v$ と書き，また§30 に定義された変分記号 δ をここでも同じ意味で用いる．すなわち，世界に仮想的無限小変形を行なったさいに，これに応じておこる物理量の変化を δ で示す．ただしここでは，ただ空間的変形に限ることにする．そこで上に定義された L の変分は

$$\delta \boldsymbol{L}=\frac{1}{2}\boldsymbol{T}^{ik}\delta g_{ik}-h\cdot\delta v \quad \left(h=\frac{\varDelta}{f},\quad \varDelta=\sqrt{g}\right).$$

ここで δv は，実は $v(x)-v(\bar{x})$ に等しい．ただし世界の変形で点 x が $\bar{x}$ に移ったとする[17]．ところで§30 で，エ

17）訳者注：変形によって x が $\bar{x}=x+\delta x$ に移動したとする．これに対して v_i は $v_i(x)\to\bar{v}_i(\bar{x})$ のように変化する．ただし $\bar{v}_i$ は $v_i(x)dx^i=\bar{v}_i(\bar{x})d\bar{x}^i$ で定義される（§30（18）参照）．したがって本来の定義では

ネルギー保存則を導くのに使った議論をここでは逆に使う．すなわちエネルギー原理がなりたつものとすれば，§30 の (20′) によって

$$\int \boldsymbol{T}^{ik}\delta g_{ik}dx = 0$$

が導かれる．一方 $\int \boldsymbol{L}dx$ は世界の変形に対して不変な積分であるから（ある有界な積分域の外では $\delta x=0$ とする）

$$\int \delta \boldsymbol{L}\cdot dx = 0$$

がなりたつ．そこで両式を合せると

$$\int h\delta v\cdot dx = 0, \qquad \text{すなわち} \quad \delta v = v(x)-v(\bar{x}) = 0$$

となる．したがって**流体によって占有されている空間の領域（単連結領域）では，v は一定の値をもつことが導かれた．**これによりエネルギーの法則は自明なものとなり，また運動量の法則もこの事実により最も簡単に表わされる．

平衡状態にある流体の塊りは，その質量分布についても，またその生みだす重力場に対しても，球対称の性質をもつ．そこでこのような場合を考えることにすれば，§33 と同様に，ds^2 は 3 個の未知関数 k, l, f で規定される．もしはじめから $k=1$ とおけば，k の変分によって導かれるはずの

$$\delta v = \delta v_0 = \bar{v}_0(x)-v_0(x) = -\frac{\partial \delta x^r}{\partial x^0}v_r - \frac{\partial v_0}{\partial x^i}\delta x^i$$

しかし仮定により $\delta x^0=0$，$v_1=v_2=v_3=0$ から

$$\delta v = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_0}{\partial x^i}\delta x^i = v(x)-v(\bar{x})$$

方程式を逃がしてしまうことになる．この方程式の代償は，半径方向への空間の無限小変位に対する作用積分の不変性から導かれる方程式；つまり運動量保存則 $v=$一定 という方程式である．そこでこれから解を求めるべき方程式はつぎの変分によりあたえられる：

$$\delta\int(\kappa\boldsymbol{L}+\boldsymbol{G})dx \propto \delta\int\{\Delta' w+\kappa r^2\mu_0\Delta-\kappa r^2 vh\}dr=0.$$

ここで Δ と h を独立量と考え，w は

$$w=\left(1-\frac{1}{h^2}\right)r$$

として，h の関数とみなす．まず Δ についての変分をとれば

$$w'-\kappa\mu_0 r^2=0, \qquad \text{したがって} \quad w=\frac{\kappa\mu_0}{3}r^3.$$

そこで

$$\boxed{\frac{1}{h^2}=1-\frac{\kappa\mu_0}{3}r^2} \tag{55}$$

となる．いま流体は半径 r_0 の球であるとする．したがって (55) から

$$r_0<a=\sqrt{\frac{3}{\kappa\mu_0}}$$

である必要がある．仮に水の球を考えると，$a=4\times10^8\ \mathrm{km}=$ 22 光分 である．この球の外では §33 に求めた解がなりたつはずである．したがって球の外では

$$\frac{1}{h^2}=1-\frac{2m}{r},\quad \Delta=1$$

となる．ところで球の表面における境界条件によれば，h と f はこの表面で，内部の値と外部のそれが，一致しなければならない．また圧力 p は表面では当然 0 になるべきである．まず h の連続性から，流体球の重力半径 m に対して

$$m=\frac{\kappa\mu_0 r_0^3}{6} \tag{56}$$

がなりたつ．ところでさきに求めた r_0 と μ_0 の間になりたつ不等式を使うと $2m<r_0$ でなければならない．したがって無限遠から流体球に近づくとき，前に述べた，特異点の球面 $r=2m$ に到達するより前に，われわれはまず中心から r_0 の距離において流体の中にはいりこむ．この内部では，外部とは別の重力場が存在し，そこにはもはや $r=2m$ の特異点の壁は存在しない．ここで

$$v=\mu^* f=\frac{\mu^*\Delta}{h}$$

はひとつの定数であることに注意し，また流体の球面上では $\mu^*=\mu_0$，したがって表面上の h の値を h_0［(55) の $r=r_0$ とした値］とすれば，$v=\mu_0/h_0$ となる．そこで流体の内部では

$$v=(\mu_0+p)f=\frac{\mu_0}{h_0}. \tag{57}$$

h の変分からは方程式

$$-\frac{2\Delta'}{h^3}+\kappa r v=0$$

が導かれる．一方（55）を r について微分すると

$$\frac{h'}{h^3}=\frac{\kappa\mu_0}{3}r.$$

これと上の式を組み合わせると，すぐに積分ができて

$$\Delta=\frac{3v}{2\mu_0}h+(\text{定数}).$$

この v に $\dfrac{\mu_0}{h_0}$ を代入し，さらに流体の表面で $\Delta=1$ となることを使うと，上の積分定数は $-1/2$ となる．したがって

$$\Delta=\frac{3h-h_0}{2h_0},\quad \boxed{f=\frac{3h-h_0}{2hh_0}}.$$

これを（57）に代入すれば

$$\boxed{p=\mu_0\frac{h_0-h}{3h-h_0}}.$$

したがって空間（流体内部）の計量基本形式

$$\begin{aligned}d\sigma^2=&(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2\\&+\frac{(x^1dx^1+x^2dx^2+x^3dx^3)^2}{a^2-r^2}\end{aligned}\tag{58}$$

から重力ポテンシャル，あるいは光速度 f，ならびに圧力 p が決定される．

ここで流体内部の 3 次元空間の中に，ひとつの余計な座標 z を

$$z=\sqrt{a^2-r^2}$$

によって持ちこめば，この定義から

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+z^2=a^2 \tag{59}$$

となる．したがって

$$x^1dx^1+x^2dx^2+x^3dx^3+zdz=0.$$

そこで（58）は

$$d\sigma^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2+(dz)^2$$

のように書きかえられる．すなわち，**流体球の内部では，直交座標系**（x^1, x^2, x^3, z）**をもつ 4 次元ユークリッド空間のなかにある球**（59）**の表面における幾何学とまったく同じ 3 次元球的幾何学が**なりたつことがわかる．流体はこの 4 次元空間の球の一部分（$a \geqq z \geqq \sqrt{a^2-r_0{}^2}=z_0$ で表わされる“北半球の一部”）を覆う椀状の“帽子”と思えばよい．また圧力 p は，球面上の点の“高さ”（“赤道面”からの高さ）z を使って

$$\frac{p}{\mu_0}=\frac{z-z_0}{3z_0-z}$$

のように表わされる．ところで緯度 $z=3z_0$ の所では p は ∞ となる，この点を通過するとき p はその符号が変わる．このような点の存在は物理的に許されないことである．したがって $3z_0>a$ でなければならない．さきに求まった流体の半径 r_0 と a の関係は単に $a>r_0$ であったが，$3z_0>a$ をかきなおすと $a>\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a>r_0$ となり，r_0 の許容範囲はこれによりさらに制限をうけることになる．

流体球に対する上述のような解をはじめて見つけたのはシュヴァルツシルド [22] である．静的球対称の重力場と

いう最も重要な場合の解が発見されて後，軸対称の静的重力場というより一般的な問題が本書の原著者ワイルによって解かれた [23]．この場合における重力場の方程式の解がどのようになるかを述べるために空間座標として正準円筒座標 r, θ, z を導入して，計量基本形式をつぎのようにおく（これがむしろ正準円筒座標系の定義といえよう）：

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2,$$

$$d\sigma^2 = h^2\{(dr)^2 + (dz)^2\} + \frac{1}{f^2} r^2 (d\theta)^2.$$

θ は対称軸のまわりの角を示し $\mathrm{mod}\cdot 2\pi$ をもつ．すなわち θ と $\theta + 2\pi n$（$n=$ 自然数）とは同じ世界点を示す．対称軸は $r=0$ で表わされる．上にでてきた h と f はともに r と z だけの関数とする．さて現実の空間内の（r, θ, z）を座標にもつ点を，ユークリッド空間内の点に写像する．写像空間内におけるこの写像点の円筒座標は（r, θ, z）である．現実の空間における正準円筒座標系は対称軸の方向への並進 $z' = z + \mathrm{const.}$ を度外視すれば，一意的にきまる．もし $h = f = 1$ なら $d\sigma^2$ は写像ユークリッド空間の計量基本形式に一致する．もしこの円筒座標系を使った場合の質量の分布が与えられていれば，ニュートンの理論の場合と同様に，アインシュタインの場の方程式も簡単に解くことができる．いま上述の写像空間の中につぎのような質量分布を考えよう．すなわち，現実の空間内の任意の小領域 $(\Delta x)^3$ に対応するユークリッド空間中の写像領域を $(\Delta \bar{x})^3$ とする．$(\Delta x)^3$ の中に含まれる質量と同じ大きさの質量が，写

像空間の中の $(\Delta\bar{x})^3$ の中に含まれるように，写像空間の中の質量分布を規定する．この写像空間において，このように与えられた質量分布に対するニュートンの重力ポテンシャルを Φ とする．そうすれば $\log f=\Phi$ がなりたつことが証明できる．もうひとつの未知関数 $h=e^{\gamma}$ は，レヴィ＝チヴィタ［24］が注意したように，微分方程式

$$d\gamma=2r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz+r\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right\}dr$$

によってあたえられる．この右辺は Φ がポテンシャルの方程式 $\Delta\Phi=0$ を満足することを使うと，全微分になっていることが容易にわかる．ところで多くの物体が1本の対称軸のまわりに軸対称に分布しているときは，それらの間の重力（引力）によって引き合うから，なんらかの張力によってそれらを支えないかぎり，静止しているわけにはいかないことは，元来あきらかである．ところで軸対称な張力をもつ系には，軸に垂直な平面上で，軸との交点を中心とする円の接線方向を向くひとつの主張力と，軸を含む子午面内の互いに直交する二つの方向を向く主張力が存在する．これらはいずれも θ には無関係である．張力が存在しても，なお本書下巻 109–110 ページに与えた正準円筒座標系が存在することが許されるためには子午面内の二つの主張力はその大きさが等しくなければならない．それはともかくとして，ワイルの証明によれば，たとえ張力がどのように仮定されようとも，この張力は，物体どうしが互いに等しい力 K（その方向は軸の方向）をもって重力的に引き合うこ

とをさまたげる．この K は物体どうしの間に設けられた仮想的面を通して流れる張力場の流れとしてあたえられるもので，二，三の物理的理由から，この K を重力的引力と呼んでもさしつかえない．というのは，この力をもって物体自身が引き合っているからである．R. バッハ [25] の計算によれば，重力半径 m および m' をもった 2 個の質点は，正準写像空間におけるそれらの写像点のあいだの距離を $2d$ とするとき，K の値はつぎのようになる：

$$K=\frac{2c^2\pi}{\kappa}\log\frac{(d+m)(d+m')}{d(d+m+m')}.$$

m，m' が d にくらべて非常に小さいときは，この K は第一近似で，われわれの予想どおりにニュートンの値

$$\frac{8\pi c^2}{\kappa}\frac{mm'}{(2d)^2}$$

をあたえる．しかしこの結果の物理的意味について，われわれはこれ以上，深く追求してはならない．というのは，実際の二体問題の解，つまり 2 個の質点が互いに引力をもって相手を引っぱりながら，運動しているときの，運動の決定はまだ解決されていないからである．

静的重力場についてのさらに進んだ研究はレヴィ＝チヴィタ [24] によってなされた．彼の門下生は，静的な場合のみならず，定常的な場合も研究した．“定常的”というのはすべての g_{ik} が時間座標 x^0 には無関係で，そのうえ静的な場合と異なり，g_{01}，g_{02}，g_{03} が 0 である必要がない場合を指す [26]．このような方向の研究のなかで，バッハの

研究 [25] は大変興味のあるものと思う．彼は任意の質量をもった球形の物体がゆっくりと回転しているとき，そのまわりの重力場を計算した．彼の解には 2 個の重要な定数が含まれる．そのひとつは質量 m として，他は，その物体のもつ角運動量の大きさ Θ として解釈されるべきものである．バッハは Θ を無限小量とみなし，Θ^2 の程度の大きさの項までを含む解を求めた．この Θ を慣性能率と角速度の積に分解することは，この物体をとりかこむ重力場のために不可能である．

§32 のおわりでも述べたが，次の節でもう一度，静止している物体と，回転している物体のちがいについて言及したい．またそれについての計算結果にもふれたい．いかなる権利をもって，またいかなる意味において回転する物体が静止物体と異なるかについて若干の根本的な注意を付け加えよう．

§ 36　羅針儀と回転

まず，一般相対性理論においては，二つの物体のあいだの相対運動という概念は，ただひとつの物体の絶対運動という概念と同様に意味のないものであることを確認しておく必要がある．われわれが剛体の基準物体を基礎に用いるかぎり，また同時刻という概念の客観性を信ずるならば，たとえばマッハの観点にたてば，“運動群” の支配のもとに，相対運動というものは意味のある概念として存在する．

しかし一般相対性理論では，剛体的基準物体とは異なり，座標系というものは，いわば非常に“柔軟”なものとなった．その結果，相対運動について語ることは意味のないことになった．実際，2個の物体に対して，そのどちらもが勝手に運動しているように見える座標系を選ぶこともできるし，また別に，適当な座標系をとれば，これら両物体がともに静止しているようにさせることも必ずできる．

しかし汽車の衝突事件の例で，以下に述べるような簡単な説明を既に与えた．すなわちニュートンの力学では，絶対空間における静止と運動の間のちがい，特殊相対性理論では一様な並進運動と加速度運動のあいだのちがいは，ともに客観的に意味のあるものであったが，一般相対性理論ではこれらのちがいのかわりに，つぎのようなちがいが登場する．すなわち“慣性場”の作用だけによる運動と，そのようないわば“自然の軌道”からはずれた軌道を描く運動の間のちがいである．さてここで，ひとつの物体の点 O のまわりの“回転”というときは，中心点 O が移動するとき，O と一緒に移動する“慣性羅針儀”(Trägheitskompass)(すなわち磁石を用いた羅針儀ではなく，たとえばジャイロ・コンパスのようなもの）を基準とした場合の，この物体の回転を意味するものと約束する．慣性羅針儀とは，既に第 II 章§12 で，単に羅針盤と呼んだもののことである．ここでもう少し詳細にこの羅針儀の構造について述べよう！ まず羅針儀の中心 O は 1 本の世界線を描く．この世界線上の任意の 1 点 P のまわりに“無限小の空間的近傍”

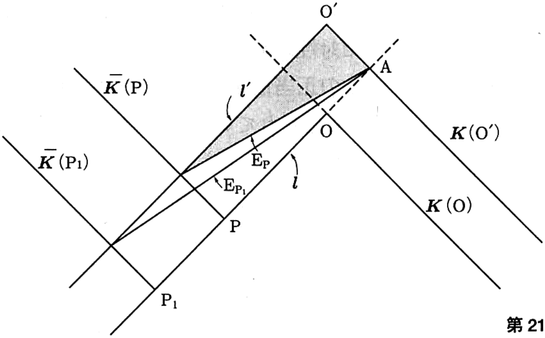
$\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}}$ をつぎのような具合に作る．すなわち点 P における世界線の（時間的）方向 $\boldsymbol{r}(\mathrm{P})$ に垂直な，P を基点とするあらゆる線素の全体の張る空間が $\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}}$ である．いま $\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}}$ に属する任意の線素（ベクトル）を，P にごく近接した，世界線上の点 P′ まで平行に移動させたとき，一般には，移動後の線素は点 P′ における世界線の方向 $\boldsymbol{r}(\mathrm{P}')$ に垂直ではなくなる．そこでレヴィ＝チヴィタに従って，移動後のベクトルを，$\boldsymbol{r}(\mathrm{P}')$ に平行な成分と，これに垂直な成分にわける．この垂直な成分だけに着目することによって，（同様の操作を $\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}}$ のすべてのベクトルに対して行なう）点 P′ における“無限小空間的近傍” $\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}'}$ が作られる．このようにして $\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}}$ から $\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}'}$ への合同写像が定義される．この写像こそ，まさに上述の慣性羅針儀の定義である〔訳者注：点 P における $\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}}$ を慣性羅針儀と考えるとき，これが O の世界線にそって P から P′ まで運ばれる際，その運搬の規則が上述の合同写像であれば，運搬された結果，点 P′ で，羅針儀の針がどっちを向くかは，この写像により完全に規定される．すなわち針は平行にたもたれたまま運搬される〕．慣性羅針儀の具体例としてはフーコー振子の振動平面を利用したジャイロ・コンパスがそれである．この原理にしたがって，フォッカー［27］は，太陽の重力場による地球の回転軸の弱い歳差運動を計算した（付録 II）．

また別の具体例としては，たとえば回転している流体の球がある．静止している流体球による重力場の問題はシュヴァルツシルドによって，その解を求めることができた．

これと同じような初等的な方法で，回転している流体球の問題を解くことができなくても，この問題の計算がどのようになるかについては，何の疑点も存在しない．静止流体球と回転流体球の問題のそれぞれの解は互いに同等ではないことは明らかである．適当な座標変換により，一方から他の解を導くというようなことは不可能である．球の中心にある慣性羅針儀を基準としたとき，前者では流体は静止しており，後者では流体は回転している．この事情はまたつぎのようにも表現される．まず球の中心 O は 1 本の世界線を描く．この世界線上の任意の 1 点 P_0 において空間 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}_0}$ を作ったとする．この $\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}_0}$ の各点を $\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}_0}$ に垂直に貫通する世界線の束を考え，この各世界線に目じるしをつけたとする．これらの世界線は細い 1 本の管を形成する．ところで静止流体球のときは，この束に属する世界線は，点 O に隣接した流体の微小部分の描く世界線に一致している．これに反して，回転流体球の場合には，流体の微小部分の描く世界線は，上述の世界線の束に螺線状にまきつく．また§32 のおわりに述べたティリングの研究も両者のちがいを示している．彼は大きな，中空の重い球 K を考えた．またその中心部には小さな軽い球 k があるとする．そこで K が静止していて，k が回転する場合と，この逆の場合について，両者のあいだには小さいが，差違のあることが示された．ただし，ここでいう“静止”とか“回転”という言葉は，本節のはじめに約束した意味において理解されねばならない．同じ意味で，地球は“回転”しているが，星空

は“静止”している．ガリレイは地動説のために闘ったが，彼の世界像は，一般相対性理論によって粉砕されたのではなく，むしろ逆に，その正当性が具体的に解明された．

さてもっとも古くから知られている羅針儀は星空である．星の運動の速さは，光の速度より大きいことはありえないから，無限の遠方にある星からの光を観測することによって空間の中にひとつの方向を固定することが可能となる．恒星に対して地球が自転していると主張することの正当性はたしかに保証されているとはいえないかもしれないが，多数の恒星から地球自身のいる場所 O に到達する光線群によって場所 O に築かれる栗のイガ状の“光線の足場”に対して地球が回転（自転）していることはたしかである．“恒星自身に対して”という場合と，上述のような“栗のイガ状の光線群”に対する場合とでは，両者のあいだには本質的な差違がある．なんとなれば，光線の進路は，恒星と地球のあいだの空間を支配している計量場に依存するからである．この恒星羅針儀についてもう少し詳しく述べよう．いま二つの与えられた世界点 O，O′ のそれぞれに過去の方に開いた光円錐 $\boldsymbol{K}(\mathrm{O})$，$\boldsymbol{K}(\mathrm{O}')$ を設置する，いま O′ は，O の能動的未来圏の中に属する点とする．$\boldsymbol{K}(\mathrm{O})$ の表面にのっている１本のゼロ測地線を $\boldsymbol{l}$，この $\boldsymbol{l}$ 上の１点を P とする．P は O から非常に遠方にあるとし，後に無限遠に移行させる．ひとつの恒星が P を通過したとすれば，その後にこの星を見ることができる観測者（世界点）は，P を頂点とし未来の方に開いた光円錐 $\bar{\boldsymbol{K}}(\mathrm{P})$ の表面または内側にある世界点に限



第 21 図

られる．この $\bar{\boldsymbol{K}}(\mathrm{P})$ はゼロ曲線 $\boldsymbol{l}$ にそって $\boldsymbol{K}(\mathrm{O})$ に接している．$\bar{\boldsymbol{K}}(\mathrm{P})$ のなかにある円錐面 $\boldsymbol{K}(\mathrm{O}')$ の部分は，両円錐面の交線によってその境界が与えられる．ここで簡単のために特殊相対性理論のワク内で，また次元数も 4 のかわりに 3 次元として図示すれば，第 21 図のようになる．上に述べた円錐面 $\boldsymbol{K}(\mathrm{O}')$ の部分は楕円 $\mathrm{E_P}$ で区切られた円錐帽子（図で網点を施した部分）となる．P が $\boldsymbol{l}$ の上を移動すれば，楕円 $\mathrm{E_P}$ は円錐面 $\boldsymbol{K}(\mathrm{O}')$ 上を移動する．このようにしてつぎつぎに生まれる楕円はどれも特別の点 A［“直線” $\boldsymbol{l}$ を未来の方に延長したとき，円錐面 $\boldsymbol{K}(\mathrm{O}')$ と交わる点が A である］において互いに接している．P が $\boldsymbol{l}$ に沿って無限遠点に遠ざかるとき，$\bar{\boldsymbol{K}}(\mathrm{P})$ と $\boldsymbol{K}(\mathrm{O}')$ の交わりの楕円はあるきまった方向に次第に伸びた形になる．その方向とは $\boldsymbol{K}(\mathrm{O}')$ 面上にある，$\boldsymbol{l}$ に平行な直線 $\boldsymbol{l}'$ の方向で

ある．$\boldsymbol{K}(\mathrm{O}')$ の任意のひとつの母線（直線）と楕円 $\mathrm{E_P}$ の交点を Q とするとき，P が無限遠に遠ざかるにつれて，Q も無限遠点に移行するのは，この母線が $\boldsymbol{l}'$ に一致する場合に限る．一般相対性理論の場合にも，定性的には上と同じような図が描かれる．その場合には $\mathrm{E_P}$ は楕円に似た形の閉曲線となり，P の移行により生ずる楕円に似た閉曲線の集団はすべて点 A において互いに接する．また $\boldsymbol{l}$ 上の 1 点 $\mathrm{P_1}$ が，図に示されているように，P にくらべて，O からより以上離れた位置にあるとすれば，楕円 $\mathrm{E_{P_1}}$ は $\mathrm{E_P}$ を包囲する．いま無限遠では計量場は，特殊相対性理論の計量に漸近的に近づくと仮定する．その場合には，光円錐 $\boldsymbol{K}(\mathrm{O}')$ 上にあるひとつのゼロ測地線と $\mathrm{E_P}$ との交点を Q とするとき，点 P を無限遠に遠ざけるのに応じて，Q も無限遠に遠ざかるようなゼロ測地線 $\boldsymbol{l}'$ はただひとつだけ存在する（計量場の状態がどのようなものであっても，このようなゼロ測地線が少なくとも 1 本は存在することは証明できる．しかしもし無限遠では計量場の状態が漸近的に非定符号のユークリッド的計量に近づくという仮定を不変な形式で数式的に表現しようとすると，この仮定のひとつの本質的な部分を表現するためには，ゼロ測地線 $\boldsymbol{l}'$ はただ 1 本に限るという要請が必要となる）．以上に述べたことから $\boldsymbol{K}(\mathrm{O})$ 上の任意のゼロ測地線 $\boldsymbol{l}$ には，$\boldsymbol{K}(\mathrm{O}')$ 上の 1 本の母線 $\boldsymbol{l}'$ が対応することが明らかとなった．次元数を 3 から 4 に上げれば，いままでのような表現法は使えなくなるが，実質的な事情には何の変更も必要としない．いま点 O においてひと

つの時間的方向 $\boldsymbol{r}$ が与えられたとすれば，O における任意のゼロ曲線の方向を $\boldsymbol{r}$ に平行な成分と，これに垂直な成分，つまり $\boldsymbol{R}_{\mathrm{O}}$ の中に属する成分に分割できる．O′ についてもすべて同様のことが行なわれたとすれば，さきに述べた $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{l}'$ の対応を考えにいれるとき，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{O}}$ における方向と $\boldsymbol{R}_{\mathrm{O}'}$ における方向の間の対応関係が確立されたことになる．$\boldsymbol{R}_{\mathrm{O}}$ に属する方向を O′ まで移行させる規則は，O の近所における計量場の性質によって完全に規定されるものである．この“方向運搬の規則”こそまさに恒星羅針儀の原理である．この規則は有限の距離だけはなれた 2 点 O, O′ における方向を直接（つまり無限小移動をつみかさねるといったような間接的方法にたよらずに）比較することを可能にするものである．しかし反面，つぎのような不便な点もある．すなわち点 O における二つの方向のなす角は，点 O′ における対応する方向の間の角と，一般には等しくない．したがって羅針儀は O から O′ まで運搬されるとき，自分自身のもとの形に合同ではなくなる．観測者と恒星の間に介在している計量場は天空の星から来る光の方向を曲げる，したがって星の見かけの位置を歪曲する［しかし種々の世界点 O, O′, … において上述のような方法によって求められた（観測者ごとに異なる）歪んだ星座の像を，ただひとつの“真実”の像に還元させることができることを一般相対性理論はわれわれに教えてくれる］．

上に述べた慣性羅針儀ならびに恒星羅針儀において，一方は慣性（Beharrung）によるものであり，他は調整

(Einstellung) によるもので，これらのあいだの差違が明確に理解されたと思う．慣性羅針儀は，フーコー振子やコマの例からもわかるように，ある場所から他の場所に運ばれるさいに，それのもつ特定の方向は，刻々それに働いている慣性によって維持される．しかしそれの最初の方向については，われわれが好むままにそれを採択できる．それは羅針儀の構造によって規定されるべきものではない．これに対して恒星羅針儀では，恒星から来る光線の方向に，羅針儀のもつ特定方向が合致するように“調整”される．また磁石を用いた羅針儀では針は常に磁場の方向に合致される．磁針の向きをわれわれが勝手に与えることはできない．それは，常に，それの過去の状態に関係なく，(つまり初期条件に関係なく) その磁石が置かれている磁場の状態によって決定される．したがって恒星羅針儀や磁石を使って特定の方向を，ある場所から他の場所へ運搬する場合には，各場所における方向は，その場所だけによってきまり途中の運搬経路には無関係であることは容易にわかるであろう．これに反して慣性羅針儀の場合には移動後の方向は，一般には移動経路によって異なる．ひとつの方向を慣性羅針儀の助けをかりて，無限小移動をつみかさねることによって他の場所まで移すとき，このような無限小操作が積分可能であると仮定してよい根拠を，元来，われわれはもちあわせない．積分可能な例としては，たとえばユークリッド空間中にあるコマの回転軸の方向がそれである．しかし，二つのコマが同一点から出発して，別々の道をたど

って非常に長い時間を経過したのちに，これらが再び邂逅したとき，たとえ出発時に両者の回転軸の向きが同じであっても，再会の際には，両者の向きが任意の程度にくいちがうことがありうる．なんとなればコマは外部からの作用を受けないように完全に外界から遮断されることはできないからである．いままで述べたことは方向の移動に対する考察である．しかし方向ばかりでなく，ベクトルの長さの移動に際しても，“慣性的移動法”（Beharrung）と“調整的移動法”（Einstellung）の間には差違がおこる．これに関しては後にまたふれる．

いままで述べてきたわれわれの考察は常に 物質＋慣性場（重力場）の全体に関与するものである．もし物質が慣性場を作り，したがってその状態を一意的に規定するという原理を実際に遂行するためには，物質と慣性場の間の力学的関係をさらに深く究明する必要がある．運動の問題に対する現実の解についてわれわれが具体的に議論することができるときはじめて，上述のふたつの実体の間の関係は明確なものとなる．

§ 37 重力場のエネルギー．受動的重力質量と能動的重力質量

孤立した物理系はその歴史の流れに応じて，世界の中に1本の管を描く．この管の外では電流密度 $\boldsymbol{s}^i$ は0になる（と仮定する．正確にいえば0でなくても，これから後に展開

する議論がなりたつほどに小さな値であればよい）．電流の連続の方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}^i}{\partial x^i} = 0 \tag{60}$$

から，上述の世界管を切る任意の3次元的曲面を通過する $\boldsymbol{s}^i$ の総量は，常に一定の値 e_0 をもつ．ここで e_0 の符号も決定するために，世界管において過去から未来に向く方向を正の向きときめる．不変量 e_0 はこの孤立系の**総電荷**である．いま座標系を適当にえらんで，すべての“平面” $x^0 =$ 一定 による世界管の切口がすべて有界の拡がりをもち，また x^0 が増加する方向が過去→未来の方向と一致するようにさせれば，e_0 は積分

$$\int \boldsymbol{s}^0 dx^1 dx^2 dx^3 = e_0$$

によって表わされる．この積分は任意の“平面” $x^0 =$ 一定の全面上にわたる積分を示す．この積分の値 e_0 は時間 x^0 に無関係である．このことは（60）を“空間座標” x^1, x^2, x^3 について積分することにより直接証明できる．この事実はただ連続の方程式（60）が成立しさえすればなりたつことで，物質に対してどのような描像を描こうと，あるいはローレンツの電子論のように $\boldsymbol{s}^i = \rho u^i$ と仮定しようがしまいが，そのようなことには無関係である．

同じような形式の保存則はエネルギーおよび運動量に対してもなりたつであろうか？　§ 30 の方程式（26）は，重力理論の特徴である付加項のために，このままでは保存

則をわれわれに与えない．しかしこの付加項も 4 次元発散（Div）の形に書きあらわすことができる．そのためにまずひとつのきまった座標系を基礎にとり，世界連続体に，本来の意味における無限小変位をあたえる．つまり § 30 に考えた変位の成分 ξ^i が場所によらず，世界中いたるところ定数の場合を考えよう．この場合には任意の有界の領域 $\boldsymbol{X}$ に対して

$$\delta' \int_{\mathbf{X}} \boldsymbol{G} dx = 0$$

がなりたつことは自明である［この方程式は g_{ik} およびその微分がどのような関数であっても，また一般座標変換に対する不変性に関係なく成立する．δ' は § 30 の（19）で定義されたように，変位にともなう変分を示す］．そこで変位に対して

$$\int_{\mathbf{X}} \frac{\partial(\boldsymbol{G}\xi^k)}{\partial x^k} dx + \int_{\mathbf{X}} \delta\boldsymbol{G} dx = 0$$

となる．ところで § 30 の定義にしたがって

$$\delta\boldsymbol{G} = \frac{1}{2}\boldsymbol{G}^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\boldsymbol{G}^{\alpha\beta,k}\delta g_{\alpha\beta,k} \qquad (13)$$

とおけば，部分積分から

$$2\int_{\mathbf{X}} \delta\boldsymbol{G} dx = \int_{\mathbf{X}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\boldsymbol{G}^{\alpha\beta,k}\delta g_{\alpha\beta}) dx + \int_{\mathbf{X}} [\boldsymbol{G}]^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} dx.$$

ξ^i はいまは定数であるから

$$\delta g_{\alpha\beta} = -\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\xi^i.$$

ここで

$$\boldsymbol{G}\delta_i^k - \frac{1}{2}\boldsymbol{G}^{\alpha\beta,k}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = \boldsymbol{t}_i^k$$

という量を定義すれば，上の $\delta'\int \boldsymbol{G}dx = 0$ は

$$\int_{\boldsymbol{X}}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{t}_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2}[\boldsymbol{G}]^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\right\}\xi^i dx = 0$$

となる．この式は任意の積分域 $\boldsymbol{X}$ に対して成立するから，そのためには被積分関数自身が 0 である必要がある．ξ^i が任意の定数であることを考慮すると，結局つぎの恒等式が導かれる：

$$\frac{1}{2}[\boldsymbol{G}]^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\boldsymbol{t}_i^k. \tag{61}$$

ここで重力場の方程式を使うと，(61) の左辺は

$$= -\frac{\kappa}{2}\boldsymbol{T}^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}$$

となる．そこで，これを物質のエネルギー・運動量テンソル密度に対する方程式 (26) に代入すれば

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}_i^k}{\partial x^k} = 0, \qquad \boldsymbol{U}_i^k = \boldsymbol{T}_i^k + \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{t}_i^k \tag{62}$$

となる．この方程式はつぎのことを示している：重力のポテンシャルおよび重力の強さの成分だけに依存する量 $\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{t}_i^k$ を重力場のエネルギー・運動量密度と呼ぶことにすれば，物理系（物質系）と重力場からなる全系に対しては，それ

のエネルギー・運動量密度は単純な 4 次元 Div の形式の保存則を満足する.

しかしながら，$\boldsymbol{t}_i^k$ を重力場のエネルギー・運動量密度とみなすことは，物理的にみて意味のないことである．なんとなれば，この量はテンソル密度でもないし，また対称性ももたない．実際，適当に座標系を選べば，ある 1 点における $\boldsymbol{t}_i^k$ のすべての成分を 0 にさせることができる．それにはその点における測地座標系を選べばよい．また反対に，重力が完全に存在しないユークリッド的世界でも，曲線座標系を用いることによって，重力場のエネルギーの存在などは到底問題になりえないはずにもかかわらず，$\boldsymbol{t}_i^k$ に 0 でない値をもたせることもできる．したがって微分型の関係式（62）は物理的意味をもたないが，それにもかかわらずこれを孤立系に適用して全空間にわたって積分すると不変な保存則［28］が導かれる.

ひとつの孤立した物理系はそれの作る重力場も含めて，それが運動するあいだに世界の中に，1 本の管を描く．この管の外では，つまりこの孤立系をとりまく空虚な世界では，この物理系のもつ $\boldsymbol{T}_i^k$ はもちろん，重力場も存在しない（と仮定する）．したがって計量基本テンソルが，世界管の外では定数となるような座標系 $x^0=t, x^1, x^2, x^3$ をえらぶことができる．特に計量基本形式が，管の外で

$$dt^2-\{(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2\}$$

の形になるように座標系を選ぶことが可能である．したがって管の外部では，ローレンツ変換を度外視すれば，座標

系は上の要求によって，一通りに決定される．またこのような座標系を用いれば，管の外では $\boldsymbol{t}_i^k$ は0となる．ここで，任意の $t=$一定 という“平面”による管の切口は有界のひろがりをもつものと仮定する．そこで（62）をこのような平面上において，x^1, x^2, x^3 について積分すれば，

$$J_i = \int \boldsymbol{U}_i^0 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{63}$$

は時間 t に無関係であることが容易にわかる．すなわち $dJ_i/dt=0$．われわれは J_0 をこの系の全エネルギー，J_1, J_2, J_3 をこの系のもつ全運動量の成分とよぶことにする．

J_i はすべて座標系のとりかたに無関係な意味をもつ．まず管の内部で，座標系が任意の変換をこうむろうとも，J_i の値は不変であることを証明しよう．いま $\bar{x}^i$ は新しい座標を示すものとし，これは管の外部では，もとの座標 x^i と一致するものとする．ここで二つの“曲面”

$$x^0 = 一定 = a \quad および \quad \bar{x}^0 = 一定 = \bar{a} \qquad (\bar{a} \neq a)$$

を考える．この両“曲面”は管のなかでは互いに交わらないものとする（a と $\bar{a}$ の値の差を十分に大きくとればこのことは実現できる）．ここでつぎのような第三の座標系 x^{i*} を設けることができる．それは“曲面” $x^0=a$ の近傍では x^i - 座標系と一致し，第二の“面” $\bar{x}^0=\bar{a}$ の近傍では $\bar{x}^i$ - 座標系と一致し，また管の外では x^{i*} は $x^i=\bar{x}^i$ のいずれにも一致するような座標系である．いまこの x^{i*} 座標系を用いて $x^{0*}=a$，および $x^{0*}=\bar{a}$ においてエネルギー・

運動量の成分 J_i^* を計算すれば $J_i = J_i^*(x^0 = x^{0*} = a) = J_i^*(\bar{x}^0 = x^{0*} = \bar{a}) = \bar{J}_i$ となる．

この結果から，J_i については，ただ座標の一次変換に対するそのふるまいをしらべればよいことになる．これについてはすでに本書上巻 443 ページで述べた．その結論に従えば：4 個の数 J_i は，**孤立系をとりかこむユークリッド的世界のなかにある定数の成分をもつひとつの共変ベクトルの成分である．**

(62) は恒等式 (61) と，物理系のエネルギー・テンソル密度に対する方程式 (26) から導かれたものであるが，もし (26) のかわりに恒等式 (26′) を恒等式 (61) に代入すれば，(62) はまた恒等式となる．ただしそのときの $\boldsymbol{U}_i^k$ は，(62) に定義されたもののかわりに

$$\boldsymbol{U}_i^k = -[\boldsymbol{G}]_i^k + \boldsymbol{t}_i^k = \boldsymbol{R}_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k \boldsymbol{R} + \boldsymbol{t}_i^k \tag{64}$$

となる．この $\boldsymbol{U}_i^k$ を用いるときは，それから導かれる積分は (63) で与えられた J_i の κ 倍となる．静的重力場では $J_1 = J_2 = J_3 = 0$ となり，また κJ_0 は

$$\boldsymbol{R}_0^0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{R} + \boldsymbol{t}_0^0 = \boldsymbol{R}_0^0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{R} + \boldsymbol{G}$$

の空間積分に等しい．ところで § 30 の最後の部分で，$\frac{1}{2}\boldsymbol{R}$ の積分を，部分積分によって $\boldsymbol{G}$ の積分に書きかえることができることを示した．このときの計算過程を見ればわかるように，両者の差は 4 次元 Div の形に書きあらわされる：

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{R}-\boldsymbol{G}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{g}\left(g^{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ i\end{Bmatrix}-g^{i\alpha}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \beta\end{Bmatrix}\right)\right].$$

さらに静的重力場では，§31 により

$$\boldsymbol{R}_0^0=\frac{\partial \boldsymbol{f}^i}{\partial x^i}$$

のように書きあらわされる．そこで§§ 31，33 の記号を使うと，κJ_0 は空間的ベクトル密度

$$\boldsymbol{m}^i=\frac{1}{2}f\sqrt{\gamma}\left(\gamma^{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ i\end{Bmatrix}-\gamma^{i\alpha}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \beta\end{Bmatrix}\right)$$

$$(i,\alpha,\beta=1,2,3)$$

の 3 次元 Div の空間積分（“曲面” $x^0=$一定上における積分）に等しい．

さらに重力場が球対称の場合には標準形（48）を使って $x^1=r$，$x^2=x^3=0$ という場所で $\boldsymbol{m}$ を計算すると $\boldsymbol{m}^2=\boldsymbol{m}^3=0$ となる．また $\boldsymbol{m}^1$ は

$$\boldsymbol{m}^1=\frac{1}{2}fh\left(\frac{1}{h^2}\cdot\frac{h'}{h}+\frac{2lr}{h^2}-\frac{1}{h^2}\cdot\frac{h'}{h}\right)=fh\cdot\frac{lr}{h^2}$$

となる．したがって $\boldsymbol{m}^i$ は半径方向の成分だけをもつ流れで，その大きさは

$$\frac{fh}{r}\left(1-\frac{1}{h^2}\right)$$

である．そこで電荷をもたない物体をとりまく重力場では，この大きさは

$$=\frac{1}{r}(1-f^2)=\frac{2m}{r^2}$$

となる．したがってこの中心の物体を中心として，半径 r の球面を考えるとき，この表面を通過する $\boldsymbol{m}$ の総量は r に無関係な値 $8\pi m$ となる．したがって**中心の物体の重力半径，あるいは"重力を作る質量"（能動的重力質量）m は，この物体のもつ全エネルギー，あるいはその慣性質量 $J_0 = m_0$ に比例する**：

$$\boxed{8\pi m = \kappa J_0}. \tag{65}$$

質量は，受動的重力質量として，重力場の作用を受けるばかりでなく，またそれを生み出す源でもある．上に導かれた結論によれば，**慣性質量は受動的重力質量に一致するという法則のほかに，さらに，受動的重力質量と能動的重力質量が比例する**ことが明らかとなった．この事実は，ニュートンの理論と同様に，アインシュタインの理論でも厳密になりたつ．例：§35 で考えた流体球ではその重力半径 m は (56) で与えられる．一方，その慣性質量 $m_0 = J_0$ と重力半径 m の間には (65) がなりたつ．そこで両関係式から流体球の慣性質量 m_0 は

$$m_0 = \mu_0 \cdot \frac{4\pi r_0^3}{3}$$

となる．この右辺の第二因子は，この流体球の問題を扱うために用いた正準写像空間の中における流体球の写像の占めるユークリッド的体積（したがって現実の空間における"自然"体積ではない）を示す．この式は，むしろ密度 μ_0（一定）の定義式と考えるべきで，この式によってはじめて μ_0 の厳密な意味が与えられる [29].

もし中心の物体が電荷をもっていれば，流れ $\boldsymbol{m}^i$ の大きさは

$$\frac{1-f^2}{r}=\frac{2m}{r^2}-\frac{\kappa}{2}\frac{e^2}{r^3}$$

となる．したがってこの物体を中心とする半径 r の球面によって包まれた空間の内部には

$$\frac{8\pi m}{\kappa}-\frac{2\pi e^2}{r}$$

だけのエネルギーが存在する．したがって全慣性質量 m_0 は前の場合と同様に (65) で与えられる．すなわち $m_0=8\pi m/\kappa$．しかし今の場合，上の第 2 項の意味は明白である．$2\pi e^2/r$ は半径 r の球面の外側の無限にひろがった領域にある静電エネルギーを示す．そこにおける静電場のエネルギー密度は $\frac{1}{2}\left(\frac{e}{r^2}\right)^2$ であり，全エネルギーは

$$\int_r^\infty \frac{1}{2}\frac{e^2}{r^4}\cdot 4\pi r^2 dr=\frac{2\pi e^2}{r}$$

となる．上の考察で，電場のエネルギーは計算に登場するが，空間に分布している重力場のエネルギーが一切でてこなかったということは，もちろん座標系のえらびかたに由来するものである．もし“共形”直交写像空間（本書下巻 86 ページ参照）[18)] の座標 x を用いて計算すれば，電荷をも

18)　訳者注：この場合の計量基本形式は

$$ds^2=\left\{\frac{1-(m/2r)}{1+(m/2r)}\right\}^2(dx^0)^2 -\left(1+\frac{m}{2r}\right)^4\{(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2\}.$$

たない中心物体をとりまく半径 r の球内にあるエネルギーは定数 $8\pi m/\kappa$ ではなくて

$$
\begin{aligned}
&= \frac{8\pi m}{\kappa}\left(1+\frac{m}{2r}\right)^4\left(1-\frac{m}{2r}\right) \\
&\approx \frac{8\pi m}{\kappa}+4\pi\frac{3m^2}{\kappa r} \qquad (r \gg m \text{ のとき})
\end{aligned}
$$

となる．この第 2 項は重力場のエネルギー密度が r $(\gg m)$ のところで，およそ $-3m^2/\kappa r^4$ の大きさで分布していることに対応する．ベクトル密度 $\boldsymbol{m}^i$ は，4 次元計量空間における本来の定義にしたがったベクトル密度ではないから，ここに導かれたエネルギーの概念も同様に，閉じた系に対してだけ，意味のあるものである．マックスウェルの電磁場の理論におけるエネルギー（密度）が，座標系のとりかたに無関係に，常に一意的に，位置だけの関数として決定されることにくらべれば，重力論における $\boldsymbol{m}^i$ の上述のような任意性は，ひとつの欠点のように見受けられる．しかし私には，むしろこの点こそ，アインシュタインの理論が物理的真実を射ぬいている証拠であるように思える．また電磁場に対しても，そのエネルギーの局在化（つまりエネルギー密度の定義）について，重力の場合のそれと同じような任意性がはいりこむように，われわれはむしろ現在のマックスウェルの理論を修正することを検討すべきではないだろうか．たとえば光電効果を考えてみよう．この現象が起こるためには，入射光の波面のある場所に，電子を飛びださせるのに十分なだけのエネルギーが集中する必要が

ある（もちろん，全体としてエネルギーの保存が成立するべきことは当然ではあるが）．しかし電磁波のエネルギー密度に対する，マックスウェルの理論にもとづいた，現在われわれの知っている公式では，このような高度のエネルギーの集中を説明することはできない．歴史的にいえば，つぎのようになる：まず静電場のエネルギーに対する公式を直接，重力場の場合へ転用すれば，重力の場合には負のエネルギー密度 $-\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\Phi)^2$ が分布することになる．なんとなれば静電気学では同種の電荷は反撥し，重力のさいには同符号の質量が互いに引き合うからである．アインシュタインの重力論が発表される以前に，電磁場の理論を手本にして重力論を作ろうとする多くの試みがあったが，これらのすべての試みに対して重力場のエネルギー密度のもつ上述のマイナスの符号は，最も厄介な問題点であった．**アインシュタインは，重力場のエネルギーに対する一意的な局在化の原理**（エネルギー密度を一意的に定義できるものとする要請）**を犠牲にした．**

系の中心にある物体が電荷をもっているときの重力場の公式を特に電子に応用してみよう．ここで電子によって作られる静電場のエネルギーが無限大にならないように，したがってまた，その慣性質量が有限の値をもつように，電子はある有限の半径をもつものと考える．ところでわれわれの求めた重力場の解には，それが距離 r についてどの程度に小さな値まで適用できるかということには無関係に，

ひとつの有限な（能動的重力）質量 m が登場する．この欠点は質量を一種の場の流れとして表現することにより解消できる．ファラデーによれば電子の電荷は電場の流れ，つまり電子を包む閉曲面 Ω を通して送り出される電力線（電場の流れ）の総量で表わされる．これと同じように質量に対しても，電子の内部にある仮説的な場の状態に無関係なある定義を与えることができる．このような定義が見つかれば，物体の内部に対する仮説には無関係に，ただ物体の外部にある場に対するわれわれの知っている場の法則だけを用いて，物体の力学を場の理論的に基礎づけることがはじめて可能となる．いまわれわれが直面している場合では，物体の外部における重力場の解を，物体の内部にまで押し進めて適用すれば，ついには特異点に到達する．その結果，たとえば重力場のエネルギー密度を物体の内部全体にわたって空間積分しようとしても，意味のないものとなる．しかしこのような場合でも，上に述べたような質量の定義法が見つかれば，物体の内部における場の様子に対する仮説には無関係にその質量を決定することが可能となる．古典電子半径

$$\eta = \frac{\kappa}{2}\frac{e^2}{m}$$

の物理的意味は電子の中心からの距離 r が η の程度になると，電場の作る重力的作用は，重力質量 m のそれとだいたい同じ程度になるということである．そこでもしエネルギー密度として正の値のものだけが許されるとすれば，$r=\infty$

の遠方から電子に近づくときおそくとも $r=\eta$ またはこれ以上，中心に近い領域ではいままでの理論は修正されねばならない．しかし重力を考慮にいれるときは，エネルギー密度が正でなければならないという要請は消滅する．——電子に関する電荷と重力の数値的な関係には実に奇妙なものがある．電子の質量 m に対応する重力半径はその古典半径 η の 10^{-40} 倍という非常に小さいものである．つまり2個の電子が衝突するとき，電子間に働く電気的斥力は，重力的引力にくらべて 10^{40} 倍も強いということになる．電子の内部構造を一般的な場の法則から導こうとするすべての試みに対して，このような著しい不均衡は，ひとつの悪質な疑問符を投げかけるものといえよう．

§ 38　力学的基本法則．場と物質

これから物質の構成要素である素粒子自身の内部にある仮説的な場にたよらずに，力学の基本法則を導いてみよう．その際マックスウェル－アインシュタインの法則だけを基礎におく：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{F}^{ik}}{\partial x^k}=0\,;\\&\boldsymbol{R}^i_k-\frac{1}{2}\delta^i_k\boldsymbol{R}=\kappa\boldsymbol{S}^i_k,\\&\left(\boldsymbol{S}^i_k=\frac{1}{2}\boldsymbol{S}\cdot\delta^i_k-F_{kr}\boldsymbol{F}^{ir},\ \boldsymbol{S}=\frac{1}{2}F_{ik}\boldsymbol{F}^{ik}\right)\end{aligned}\right\}\quad(66)$$

これらの式は物質の外部でなりたつことをわれわれは知っ

ている．すなわち世界の中で 1 次元的に無限に長く伸びた（つまり時間的に無限につづく）管状のせまい領域の外部では（66）が成立する．

まず，電荷の定義と，その保存則からはじめよう．そのためにはまず，外部に存在しているポテンシャル φ_i を，まったく技巧的に，適当な連続性を満たすように上述の世界管の内部にまで延長する．それにより物質の内部で，虚構の電磁場 $F_{ik}=\partial\varphi_i/\partial x^i-\partial\varphi_i/\partial x^k$ および虚構の電流密度

$$\boldsymbol{s}^i=\frac{\partial \boldsymbol{F}^{ik}}{\partial x^k} \tag{67}$$

を定義する．（67）の右辺は，実際，物質の内部では一般に 0 とはならない；しかしこの定義のために，ひとつの数学的な恒等式としてこの $\boldsymbol{s}^i$ は Div 型の方程式（60）を満足する．その結果，前節に述べたように，すべての“平面” $x^0=t=$ 一定 による物質の管の切口（その 2 次元的境界を Ω）が有界となるように座標系を設ければ，これらの切口のひとつにわたる積分

$$e_0=\int \boldsymbol{s}^0 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{68}$$

は，1）t に無関係な一定の値をもつ，2）e_0 の値は座標系のとりかたに無関係である．しかしここでさらに，この値が上に導入された虚構の内部場にも無関係（つまり管の内部における φ_i の様子をどのように定義しようとも，e_0 の値はそれには無関係）であることに注意すべきである：なんとなれば e_0 は，その定義によれば，ある瞬間に，物質を

とりかこむ閉曲面 Ω を通して流れでる空間的ベクトル密度

$$(\boldsymbol{F}^{01},\ \boldsymbol{F}^{02},\ \boldsymbol{F}^{03})$$

の総量に等しい．Ω の表面上では虚構的場も現実の場も，連続性の条件から，互いに一致している．管の内部を虚構的場で満たしたのは，まったく単なる数学的な技巧にすぎない．それは任意の二つの時刻 $t=$ 一定 における e_0 の値が互いに等しいこと，および e_0 が座標系のとりかたに無関係な不変量であることを証明するための数学的手段にすぎない．したがって完全に厳密につぎのことが，場の法則 (66) から証明される：すべての物体はそれぞれきまった不変な電荷 e_0 をもつ．多くの物体が互いに作用し合うときは（この場合にはそれぞれの管は合流しまたわかれる），作用の前後において，作用している各物体のもつ電荷の総和は変わらない．——電流密度 s^i は虚構的量であるが，各物体のもつ電荷は現実の量である．

まったく同様に，ひとつの孤立系に対してエネルギー・運動量の保存則を導くことができる．ただしこの系は十分に遠方において，一様なユークリッド的な，また電磁場も重力場もない空間によって包囲されているものとする．再び，前と同様に，物質の管のなかは，虚構の計量場 g_{ik} によって満たされており，これは管の外部にある現実の g_{ik} と連続的に接続しているものとする．そこで (64) に従って，（虚構の g_{ik} を使って）$\boldsymbol{U}_k^i$ を計算する．さらにそれを用いて，$x^0=t=$ 一定 という平面による管の切口にわたる積分

$$\kappa J_i = \int \boldsymbol{U}_i^0 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{69}$$

を計算したとしよう．恒等的になりたつ Div 型の関係式 (62) を積分することによって容易に証明できるように，エネルギー J_0，ならびに運動量 (J_1, J_2, J_3) は t に無関係，つまり $dJ_i/dt=0$ となる．この結論を出すのには，場の法則 (66) は一切不要である．また**孤立系のもつ全エネルギー・運動量は虚構的場の選びかたに無関係である**．後者を証明するには，J_i が，座標系のとりかたに無関係であることを証明したのと同じ方法によればよい．いま $x^0=a$ の瞬間に物体の内部はある虚構的計量場（その状態を $\boldsymbol{A}$ とする）で満たされているとする．またこの時刻から十分に離れた別の時刻 $x^0=a'$ には物体の内部は，別の状態 $\boldsymbol{A}'$ をもつ虚構的計量場で満たされているとする．ここで第三の虚構的計量場 $\boldsymbol{A}^*$ を考える．これは時刻 $x^0=a$ では計量場 $\boldsymbol{A}$ に一致し，$x^0=a'$ では $\boldsymbol{A}'$ と一致するような時間的ふるまいをするものとする．いま $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}^*$ を用いて計算した J_i をそれぞれ，J_i, J_i', J_i^* と記すことにすれば，$\boldsymbol{A}^*$ 場を用いたときにつぎの関係がなりたつ：

$$\frac{dJ_i^*}{dx^0} = 0, \qquad \text{つまり} \quad J_i^*(a) = J_i^*(a').$$

したがって

$$J_i(a) = J_i^*(a) = J_i^*(a') = J_i'(a').$$

J_i は x^0 には無関係だから，$J_i(a)=$一定$=J_i$，$J_i'(a')=$一定$=J_i'$．したがって $J_i=J_i'$．

ひとつの物体の内的状態を，それをとりかこむ外部の場によって規定することは，まさにわれわれのいまの見解に合致するものである．いまわれわれが考えうる物体のなかで最も簡単なものは，§33 に与えられた静的球対称の重力場（適当な座標系を用いたとする）によってとりかこまれた物体である．その際，電場は存在しないとする．このような物体を**中性粒子**と呼ぶことにする．またこの粒子に属する座標系（つまりそれを用いた時に，この粒子をとりかこむ重力場が静的球対称な g_{ik} で表わされるような座標系）をこの粒子の**静止座標系**と呼ぶことにする．惑星運動の理論では，太陽はここに定義された意味の中性粒子であると仮定される．もちろん，このような仮定は，物体の大きさにくらべて，それよりはるかに大きな距離だけ物体からはなれた場所における場の状態について議論することを意味する．このような粒子のエネルギーおよび運動量を決定するために，この粒子を上述のような大きな距離をおいてひとつの大きな閉曲面 Ω で包囲し，Ω の内部には，それより外部にある現実の場と連続的に接続しているひとつの虚構的場を導入する．このようにすれば前と同様に（(65) 参照）

$$J_1 = J_2 = J_3 = 0, \qquad J_0 = m_0 = \frac{8\pi m}{\kappa}$$

となる．さらに座標系の一次変換を行なえば，質量 m_0 の質点が任意の一様な重力場（その計量基本形式は

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \qquad g_{ik} = \text{定数}$$

で与えられる）の中を運動している場合の，その粒子のも

つエネルギーおよび運動量に対する公式が導かれる．なお J_i が共変ベクトルの成分としてふるまうということから

$$J_i = m_0 u_i \tag{70}$$

とおくことができる．u^i はこの粒子の世界方向（定数）を示し，$u_i u^i = 1$ のように規格化されている．特に，ある座標系を用いたときに粒子の外部にある重力場が静的場：

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2, \qquad d\sigma^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k$$
$$(i, k = 1, 2, 3)$$

とすれば，その系における J_i はつぎのようになる．いまこの系からみた粒子の 3 次元速度を $\gamma_{ik}\dfrac{dx^k}{dt} = v_i$，あるいは $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ と記す．また運動量 $(-J_1, -J_2, -J_3)$ を $\vec{J}$，エネルギー J_0 を E で表わすことにすれば[19)]

19) 訳者注：いま粒子の静止座標系を基準にした場合の諸量をすべて $'$ をつけて表わすことにする．したがって

$$J_0' = m_0, \qquad J_1' = J_2' = J_3' = 0.$$

粒子の中心は $x^{1'} = x^{2'} = x^{3'} = 0$ に静止しているものとする．また粒子の外部では，計量基本形式は

$$ds^2 = (f' dt')^2 - \sum_{i,k=1}^{3} \gamma'_{ik} dx^{i'} dx^{k'}, \ (f', \gamma'_{ik} \text{ は } t' \text{ に無関係}).$$

外部の γ'_{ik}, f' を粒子の内部までそのまま延長すれば，粒子の中心は特異点となる恐れがある．粒子の内部の f', γ'_{ik} の実際の様子はわからないから，これを，内部のどこにも特異点をもたない虚構的な場でおきかえる．この場は粒子の表面では外部場と連続的に接続しているものとする．いま座標変換 $x^{\mu'} \to x^{\mu}$（必ずしも一次変換である必要はない）によって ds^2 は

$$ds^2 = (f dt)^2 - \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik} dx^i dx^k$$

になったとする．しかし f, γ_{ik} は t に無関係（静的場）とする．

この座標系からみた粒子の 3 次元的速度 v^i は

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t'} \Big/ \frac{\partial t}{\partial t'}\right)_{\vec{x}'=0} \tag{a}$$

で与えられる．また J_μ は

$$J_\mu = \left(g_{\mu\nu} J^\nu\right)_{\vec{x}'=0} = \left(g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\lambda'}} J^{\lambda'}\right)_{\vec{x}'=0}$$

$$= \left(g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\lambda'}} g^{\lambda\sigma'} J'_\sigma\right)_{\vec{x}'=0} = \left(g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial t'}\frac{1}{(f')^2} m_0\right)_{\vec{x}'=0}. \tag{b}$$

ここで J の係数 $g_{\mu\nu}, g^{\lambda\sigma'}$ 等はすべて粒子の中心における値を意味する．ところで粒子の中心 $\vec{x}'=0$ では，$g_{\mu\nu}$ の変換規則と（a）を用いて

$$(f')^2 = g'_{00} = \left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)^2 f^2 - \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial t'}\frac{\partial x^k}{\partial t'}\gamma_{ik}$$

$$= \left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)^2 \{f^2 - v^2\}.$$

ただし

$$v^2 = \left(\sum_1^3 \gamma_{ik} v^i v^k\right)_{\vec{x}'=0}.$$

したがって

$$\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)_{\vec{x}'=0} = \left(\frac{f'}{\sqrt{f^2-v^2}}\right)_{\vec{x}'=0}. \tag{c}$$

これを（a）に代入して

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial t'}\right)_{\vec{x}'=0} = \left(\frac{v^i f'}{\sqrt{f^2-v^2}}\right)_{\vec{x}'=0}. \tag{d}$$

（c），（d）を（b）に代入すれば

$$J_0 = \left(\frac{m_0 f^2}{f'\sqrt{f^2-v^2}}\right)_{\vec{x}'=0}, \qquad J_i = \left(\frac{-m_0 v_i}{f'\sqrt{f^2-v^2}}\right)_{\vec{x}'=0}$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

ここで，$v_i = \gamma_{ik} v^k$ である．いま静止系における時間 t' の単位を変更して，$f'(\vec{x}'=0)\cdot t' = t''$ を新しい時間にとれば静止系の ds^2 は

$$E=\frac{m_0 f^2}{\sqrt{f^2-v^2}}, \qquad \vec{J}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{f^2-v^2}} \tag{70'}$$

となる．ここで v^2 は

$$v^2=\sum_{i,k=1}^{3}\gamma_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}=\sum_{k=1}^{3}v_k v^k$$

を表わす．物体のエネルギーや運動量がその速度 $\vec{v}$ にどのように依存するかについては，すでに第 III 章 § 27 において詳細に述べた．種々の速度をもつ物体どうしが互いに作用しあう場合を考えるとき，はじめて速度とエネルギー等の関係の物理的意義が明確になる．これと同様に，(70′) に確立されたエネルギー・運動量と重力場 (f, γ_{ik}) の間の関係についても，2 個またはそれ以上の多数の粒子（それらはそれぞれ異なる“重力場のレベル”の中に包まれているものとする）が互いに作用しあっている場合にはじめて，(70′) という関係式の価値が現われる．例えば空間の中に二つの平面があってその各面上では g_{ik} は一定の値をもち，これら両面の間には g_{ik} の勾配が存在するとする．またはじめに，各面上にそれぞれ 1 個ずつ粒子が存在するとして，これらはなんらかの方法で互いに作用するとか，g_{ik} の勾配の中を落下（または上昇）した後に，再び

$$ds^2=\left(\frac{f'}{f'(0)}\right)^2(dt'')^2-\gamma_{ik}{}'dx^{i'}dx^{k'}.$$

したがって今までの f' は $f'/f'(0)$ におきかえられる．そこで粒子の中心では，これは 1 となるから，このような規格のもとでは

$$J_0=\left(\frac{m_0 f^2}{\sqrt{f^2-v^2}}\right)_{\vec{x}'=0}, \qquad J=\left(-\frac{m_0 v_i}{\sqrt{f^2-v^2}}\right)_{\vec{x}'=0}.$$

1個ずつもとの面上に位置をしめるものとする．もしこのような粒子間の反応がおきても重力場はもとのままだとすれば，両粒子のもつエネルギーの和は反応の前後で変わらない．同様のことは運動量の和についてもなりたつ．いま $\vec{J}=\vec{v}\times$（慣性質量）によって“慣性質量”を定義すれば静止粒子に対しては（70′）から

$$\text{エネルギー} = m_0 f, \qquad \text{慣性質量} = \frac{m_0}{f}.$$

そこで物体を重力ポテンシャルの低い場所に移せば（例えば机の上にあった物体を床の上に落せば）そのエネルギーは減少し，その慣性質量は逆に増加する [30].

もし電荷も考えに入れるならば，考えうる最も簡単な物体は，適当な座標系を用いた場合，§33の（50）で表わされる場によってとりかこまれた物体である．この場は，物体からの距離 r が増大するとともに場のないユークリッド空間に近づく（このような物体を荷電粒子と呼ぶことにする）．この場合には粒子のもつ電荷 e_0 は粒子の速度に無関係，また粒子をかこむ一様な重力場にも関係しない．さらに粒子どうしの相互作用にさいして，各粒子の電荷の総和は変化しない．“荷電粒子”はたしかに最も簡単な物体にはちがいないが，しかし物体のモデルとして考えうる唯一のものではない．——例えば外部に対して静的双極子，あるいはヘルツの考えた電波の発信器としてふるまうような物体も考えられる．——しかし物質の究極的構成要素である素粒子，特に電子が荷電粒子の一種であることは確かであ

ろう．

場の存在しないユークリッド的空間に包まれた物体の電荷，エネルギーおよび運動量の保存則は，上に述べたわれわれの議論からもわかるように，場の法則には無関係になりたつ．この事実は，これらの原理の基礎によこたわる意義にまさに対応するものである．ここでもう一度電荷やエネルギー・運動量の定義式を一括してつぎにならべておこう；

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{s}^i = \frac{\partial \boldsymbol{F}^{ik}}{\partial x^k}, \qquad e_0 = \int s^0 dx^1 dx^2 dx^3, \\ &\boldsymbol{U}_i^k = \boldsymbol{R}_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{t}_i^k, \quad \kappa J_i = \int \boldsymbol{U}_i^0 dx^1 dx^2 dx^3 \end{aligned}\right\}.$$

物体どうしが場を媒介として相互作用しているときは，いままで述べたことと事情はかわってくる．まず電荷については，マックスウェルの方程式 $\boldsymbol{s}^i = 0$（すなわち $\partial \boldsymbol{F}^{ik}/\partial x^k = 0$）は，素粒子と素粒子のあいだの空間には電荷が存在しないことを述べているものである．したがってたとえ素粒子間の相互作用があっても作用しあっている各素粒子（あるいは各物体）の電荷の和が保存することは，本節のはじめの証明と同じようにして証明できる．しかしエネルギーおよび運動量については，場自身が一般にはエネルギーをもつために，いままでとは事情が異なる．重力場の方程式からは $\boldsymbol{U}_i^k$ が 0 になるということは導き出せない．その結果，粒子のもつエネルギーおよび運動量は時間的に一定にはならない．そのかわりに力学の運動法則が登場する．すなわち今までに導かれた諸概念に，さらに**仕事**と**力**が加わる．

いま $x^0=t=$ 一定という平面による物体の世界管の切口，つまり閉曲面 Ω で包囲された空間領域にわたって (62) を積分すると（ここでも Ω の内部における $\boldsymbol{U}$ は，管のなかを満たしている虚構的重力場を使って計算するものとする），前とは異なり

$$\frac{dJ_i}{dt}=-K_i \tag{71}$$

となる．ここで κK_i は空間的ベクトル密度

$$(\boldsymbol{U}_i^1, \boldsymbol{U}_i^2, \boldsymbol{U}_i^3)$$

が 2 次元閉曲面 Ω を通して流れ出る総量を示す．この定義によれば K_i は，Ω の内部にある虚構の場には無関係で，その表面における現実の場だけできまる **4 元力**の成分であることがわかる．K_i に対するこの事実から，前と同じような考えかたを用いて，**4 元運動量** J_i も虚構的場のとりかたに無関係であることが証明できる．これを証明するために，以前と同じように，3 種類の虚構的内部場 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}'$，$\boldsymbol{A}^*$ を考える．K_i がこれらのとりかたに無関係である点に注意して，(71) を $t=a$ から $t=a'$ まで積分すれば（記号は前と同じ）

$$J_i'(a')-J_i'(a)=-\int_a^{a'}K_i dt,$$

$$J_i'(a')-J_i(a)=J_i^*(a')-J_i^*(a)=-\int_a^{a'}K_i dt.$$

したがって

$$J_i'(a)=J_i(a).$$

これまでは，完全に一般的に，また場の法則にたよらず

に議論を展開してきた．力学の方程式（71）は，まったく一般的なもので，これに登場する運動量や力の内容を具体的に，より詳細に与えるためには，近似法を用い，また場の法則にたよらねばならない．実際，場のなかに包まれている 1 個の粒子の場合には閉曲面 Ω をどの位置に設けるべきかについて，一種の妥協をしなければならない．なぜならこの Ω は粒子のもつエネルギーを，それの外にある場のもつエネルギーと区分するものであるから．いま電子を特に考えてみよう．いま運動している電子に対して，ある瞬間に，ひとつの瞬間的静止座標系を設けたとする．その座標系からみれば，その瞬間には，ちょうど静止した質点のまわりのシュヴァルツシルド型の重力場が漸近的に

$$\overset{0}{g}_{ik}\quad(\overset{0}{g}_{00}=-\overset{0}{g}_{11}=-\overset{0}{g}_{22}=-\overset{0}{g}_{33}=1,\ \overset{0}{g}_{ik}=0 : i\neq k)$$

に一致するように電子の作る重力場 g_{ik} も，Ω の外部では，$\overset{0}{g}_{ik}$ に一致するものと仮定する．そればかりでなく g_{ik} の 1 階微分で与えられる重力場の強さ $\left\{\begin{matrix} ik \\ s \end{matrix}\right\}$ についても，Ω の外では $\overset{0}{g}_{ik}$ から作られる $\left\{\begin{matrix} ik \\ s \end{matrix}\right\}$ に漸近的に一致するものと仮定する．この仮定によれば，この静止系は，Ω の外の場に対しては測地座標系の役目をしていることになる．重力場 g_{ik} をこのような漸近的重力場で表示してもかまわないような領域を漸近域とよぶことにする．電子の中心からこのような領域に属する 1 点までの距離 r は（50）からもわかるように，電子半径 η よりずっと大きくなければならない．しかし漸近域が存在するためには，そこでは重力場

の方程式の右辺 S_i^k が左辺にくらべて無視できるほどに小さくなければならない．したがって実在する電場のエネルギー密度 W は，$m/\kappa r^3$ よりもはるかに小さいことが必要である[20]．この条件は，η の定義を使うと，$W \ll e^2/\eta^4$ という仮定に等しい．そこで漸近域までの距離 r は

$$r \gg \eta, \qquad \kappa W r^3 \ll m$$

という条件で制限される．閉曲面 Ω はこの漸近域の中におさまるように設けるべきである．そのようにしてはじめて粒子に所属するエネルギーと，外部場に属するそれとを，実際的に満足のいく程度に分割できることになる．Ω の内部は虚構の静的な g_{ik}－場をもって満たす．その結果，瞬間的な静止系では，シュヴァルツシルドの外部解のおかげで，粒子の運動量は 0 となり，エネルギーは $= m_0 = 8\pi m/\kappa$ となる．

つぎに必要なことは座標変換に対する J_i の変換規則である．いまある座標系 x^i を用いて，この世界をひとつの 4 次元アフィン空間の上に写像することにする．すなわち，現実の世界で一次座標変換によって，座標 x^i をもつ点の新しい座標が $x^{i'}$ になったとすれば，この点に対応する写像点の写像空間の中における座標も，x^i から $x^{i'}$ に変わるような写像を考えることにする．さて世界の中で，粒子を示す管の二つの切口 $x^0 = a$，$x^{0'} = a'$ における 4 元運動量をそれ

---

20)　訳者注：漸近域では $\kappa^{-1}\left\{\boldsymbol{R}_k^i - \dfrac{1}{2}\delta_k^i \cdot \boldsymbol{R}\right\}$ は，シュヴァルツシルドの解を用いると $m/\kappa r^3$ の程度の量となる．

ぞれ $\boldsymbol{J}=(J_i)$：(x－座標系から見た成分が J_i)[21]，および $\boldsymbol{J}'=(J_i')$：(x'－系から見た成分が J_i') とする．§37 の証明法をまねると，アフィン写像空間における両ベクトルのちがいは，粒子の世界管の両切口 $x^0=a$，$x^{0'}=a'$ ではさまれた部分の側面にわたる積分で表わされる．もともと $\boldsymbol{J}$ を定義するときは，閉曲面 Ω の位置が不確定なために若干の不正確さをともなう．ところで上の考察によれば，$\boldsymbol{J}$ と $\boldsymbol{J}'$ の差は，この程度の不正確さを無視すれば，$\boldsymbol{J}$ は $\boldsymbol{J}'$ に一致する．ただし $\boldsymbol{J}'$ は粒子の静止系から一次座標変換によって導かれる座標系を基準にした場合の 4 元運動量である〔訳者注：この結論により J_i は上述のような不正確さの範囲で一次変換に対して共変ベクトルの成分としてふるまうことがわかる〕．したがってこのような変換に対して J_i を (70) のように書きあらわすことができる．しかし上に述べたことだけではわれわれにはまだ不満足である．われわれは測地座標系ではない座標系においても同じ式がなりたつことを証明しなければならない．つまり外部場の $\left\{ {ik \atop r} \right\}$ が 0 にはならないような座標系を使った場合にも同様のことを証明しなければならない（われわれは漸近域だけを考えれば十分である．なんとなれば，Ω の外部の座標系はそのままにし，ただ内側における座標系を任意に変更しても，もし内部と外部の接続の連続性が維持されるならば，J_i に

21) 訳者注：任意の定数の成分 ξ^i をもつ反変アフィンベクトルを用いれば，$J=J_i\xi^i$ となる．x'－系では $J'=J_i'\xi^{i'}$ である．ただし $\xi^{i'}$ は ξ^i から一次座標変換によって導かれたものである．

は何の変化もおこらないからである．なお内部の座標系の変更は Ω の内部にある虚構場の変更に相当する)．さて $\boldsymbol{U}_i^k$ は，その定義からわかるように，重力場の強さ $\left\{\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right\}$ の 2 次の項と，$\dfrac{\partial}{\partial x^s}\left\{\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right\}$ の 1 次の項の和からできている．そこで Ω の外部で，いままでの考察では 0 であった $\left\{\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right\}$ の値が（例えば他の粒子による重力場のために）0 でなくなっても，1）漸近域において，$\left\{\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right\}$ の値について，今までのそれとの差が m/r^2 よりはるかに小さいとき，また 2) $\left\{\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right\}$ の 2 次の量の値は m/r^3 よりも小さいならば，J_i の値は，今までの場合のそれにくらべてほとんど変わらない．この第 2 の条件は現実の自然界では常に非常によく満たされている．また第 1 の条件は静止系および漸近域が存在するためには必要なものであるが，重力半径 m が電子半径 η よりも異常に小さいから，m/r^2 はきわめて小さな量となり，したがってこの条件を満足させることは大変むずかしいように見える．しかし現実にはこれも十分な程度になりたっている．

そこでわれわれの仮定は，この現実の世界が以下のような好都合な座標系の設置を許すものであると考えることである．その座標系とは，それを用いたとき管の側面にそって重力場も電場もともに上に列挙した条件を満足しているような座標系である．そこで恒等式 $\partial\boldsymbol{U}_i^k/\partial x^k=0$ を管の内部にわたって積分することにより

$$J_i(t_2)-J_i(t_1)=-\int_{t_1}^{t_2}K_i\,dt \tag{72}$$

となる．この左辺の J_i は，いかなる時刻に対しても，十分によい近似で $=m_0u_i$ とおくことができる．この速度 u_i の意味は明らかであると思う．もし $u^i=dx^i/ds$ とおけば，dx^i は，物質をとりまく閉曲面 Ω の直径の程度の大きさの，物理的に見て無限小な量である．また ds^2 は管の外にある重力場によりあたえられる計量基本形式である．これと同じ意味で，積分方程式（72）を微分方程式

$$\frac{d}{dt}(m_0u_i)=-K_i$$

の形にかきかえることもできる．

つぎに K_i の計算に移ろう．管の表面では，アインシュタインの重力場の方程式がなりたっている．したがってそこでは

$$\kappa \boldsymbol{U}_i^k=\kappa\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{S}\cdot\delta_i^k-F_{ir}\boldsymbol{F}^{kr}\right)+\boldsymbol{t}_i^k$$

となる．ここで再び，時刻 $t=t^0$ において瞬間的な静止座標系を考えよう．これを用いれば，管の表面では $\boldsymbol{t}_i^k$ を無視してよい．またマックスウェルのエネルギー・運動量テンソル密度 $\boldsymbol{S}_i^k$ の中にでてくる g_{ik} は定数の g_{ik} におきかえてよい．そこで Ω を通して流れでる $\boldsymbol{S}_i^k$ を計算すれば K_i がもとめられる．そのためにはまず電磁場を，漸近域において二つの部分に分割する．つまり他の荷電物体からくる外場 F_{ik} と，今問題にしている電子自身のつくる自己場 f_{ik}（これは静電ポテンシャル e/r から作られる電場である）との和として書きあらわす．しかし外場 F_{ik} は今の計算にで

てくるせまい領域では，ほとんど一様と考えられるから，これを定数で表わす．この分割に応じて，電磁場の強さの2次量で表わされるマックスウェルのエネルギー・運動量テンソルはつぎの公式にしたがって三つの部分に分割される：

$$(F+f)^2 = F^2+2Ff+f^2.$$

この第1項は定数であるから閉曲面 Ω を通して流れでる量を計算すれば，この項にもとづくものは0となる．またマックスウェルの理論からもわかるように，あるいは計算してみれば容易にたしかめることができるように，f^2 の項も流れの計算にはきかない．最後に中央の項 $2Ff$ からの寄与を計算するには，ここで再び Ω の内部に対して，虚構の静電場（電子自身が作っている場に対して）

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} \quad (\text{ただし}\ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \varphi_0 \neq 0)$$

を考える．さきにも述べたように，F_{ik}, g_{ik} はともに定数としてよいから，ガウスの定理によって，Ω の表面にわたる積分を Ω の内部にわたる3次元体積積分に書きかえることができる：

$$\int \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\frac{1}{2}(F^{rs}f_{rs})\delta_i^k - F_{ir}f^{kr} - f_{ir}F^{kr}\right\} dx^1dx^2dx^3.$$

上の式の k についての和は本来は1から3までであるがこれを0から3までにしてもかまわない．なぜなら｛　｝の中の量はすべて x^0 に無関係であるから（もし外場 F_{ik} が時間に依存するときは，その瞬間における F_{ik} の値を上の

計算に使い，しかもその値は定数として扱う）．上の被積分関数は本書上巻 339 ページの計算にしたがって

$$\frac{1}{2}F^{kr}\left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial x^r}+\frac{\partial f_{kr}}{\partial x^i}+\frac{\partial f_{ri}}{\partial x^k}\right)-F_{ir}\frac{\partial f^{kr}}{\partial x^k}$$
$$=-F_{ir}\frac{\partial f^{kr}}{\partial x^k}=-F_{i0}\frac{\partial f^{k0}}{\partial x^k}$$

のように変形される．そこで今度はこの結果を逆に Ω の表面にわたる表面積分にかきかえる．その結果は自己場 (f^{01}, f^{02}, f^{03}) が Ω を通して流れ出る総量に定数 F_{i0} をかけたものになる．ところで (f^{01}, f^{02}, f^{03}) の Ω からの総流出量は $e_0=4\pi e=$（電子の電荷）に等しいから，

$$\boxed{K_i=e_0F_{i0}}$$

となる．そこで力学の基本法則

$$\frac{d(m_0u_i)}{dt}=e_0F_{0i} \tag{73}$$

が導かれた．この式の第 0 番目の成分は

$$\frac{dm_0}{dt}=0.$$

すなわち静止質量が時間的に不変であることを示す．世界に設けられた座標系が，$t=t^0$ の瞬間に，この電子にとって瞬間的静止系であるとすれば，この瞬間において (73) は成立する．(73) を任意の座標系からみれば，

$$\frac{d(m_0u_i)}{ds}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\cdot m_0u^\alpha u^\beta=e_0\cdot F_{ki}u^k \tag{74}$$

となる．なんとなれば，(74) は任意の座標変換に対して不変な形をしており，また特に標準座標系（すなわち電子の静止系）では，これは (73) に一致するからである．以上のようにしてわれわれは古典的な形の力学の基礎方程式に到達したことになる．ここにいたって，(74) を導きだすために仮定したことが何を意味するかが明瞭になった．すなわち質点（または電子）によって作られる自己場が，質点（すなわち世界管）の外部において場の法則 (66) に従う外部場のふるまいに順応することができるための必要条件がさきに述べた仮定である．力学の基本法則に対する上に述べたような基礎づけは既にミーによって彼の画期的な論文“物質の理論に対する基礎”(Grundlagen einer Theorie der Materie) の“力と慣性”を扱っている第3部において述べられている [31]．電子自身の作る自己場［または固有場 (Eigenfeld) ともいう］を表わす公式には，電子の特性を示す二つの定数 e と m，すなわち“電荷と質量”が含まれている：

$$\left(\varphi = \frac{e}{r}, \qquad f^2 = 1 - \frac{2m}{r}\right).$$

場の法則によれば，この e と m は時間的に不変な定数でなければならないことがわかる．また電子の世界方向 u^i は方程式

$$m\left(\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}u^\alpha u^\beta\right) = \frac{\kappa e}{2}\cdot F_{ik}u^k \qquad (74')$$

に従って変化することが場の法則から導かれる．この“力

学の方程式”は，“**重力を生みだす質量**”（**能動的重力質量**）m が同時に**慣性質量**ならびに**重量**（**受動的重力質量**）であること，および“**場を作る電荷**”e，あるいはそれに比例する $\kappa e/2$ が同時に**電気力の作用をうける電荷**に等しいことを示している．この結果から，慣性質量と能動的重力質量が原理的に等しいことがわかるであろう．ところで**質量はその本質をかえりみれば，一種の長さである**．そこでわれわれが採用すべき基本的な単位は，長さと電荷の単位である．この CE - 単位系（cm と静電単位 el；われわれにとっては，4π という因数だけくいちがっているヘヴィサイドの単位系を特に重視すべき理由はなにもない）によれば κ の値は

$$\kappa = 1.49 \times 10^{-28}\ \mathrm{cm}^2\ \mathrm{el}^{-2}$$

となる．

さて，(74) を導く根拠となったわれわれの仮定は，必然的に準静的運動の存在に導く．すなわち光がその標準の速度 c をもって電子のなかを通過するのに要する程度の短い時間のあいだに，慣性場（すなわち $\left\{ {ik \atop r} \right\}$ の場）によって規定された電子の進むべき軌道から，電子の実際の軌道が電気力によって少しはズレても，その偏向（これは角度によって測られる）はきわめて小さいことが必然的に仮定から導かれる．このような場合にかぎって，電子をとりまく電場に対するわれわれの以前の査定が正当なものとなる．特殊相対性理論のワクのなかでは，遅延ポテンシャルに対するリエナール - ヴィーヘルトの公式は，任意の加速度を

もった電子の作る固有場を与えるものである．この公式によれば，電子の世界線上の１点Ｏを頂点として未来に向かって開いているゼロ円錐面上の点におけるポテンシャルは

$$\varphi_i = \frac{eu_i}{(u_r \cdot \Delta x^r)}$$

で与えられる．u^i は点Ｏにおける電子の世界方向を示し，Δx^r はＯから，ゼロ円錐面上の点Ｐ（そこにおけるポテンシャルが上の φ_i である）までの変位ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分である．この公式は加速度をもつ１個の電子による電磁波の放出を示している．これは原子の実状に矛盾する．しかしこの結論はマックスウェルの方程式の必然的結果であるという考えかたが，物理学者のあいだでは今日一般的なものとなっている．しかしこの結果が正しくないということは，このポテンシャルの解の中に特別な向きをもった時間が登場するという事実から明らかである（すなわち未来に向かって開いたゼロ円錐が登場する．このために電磁波は放出されるが電子に向かって入射することはありえない）．これに反してもともとのマックスウェルの方程式は時間の向きについて何の指定もしていない [32]．

電子の軌道が世界という計量をもった“面”に彫む精細な深い溝については，われわれはただその縁の勾配だけを知っているにすぎない．それの奥ふかいところに何がかくされているかについてはわれわれにはわからない．ミーが仮定したように，この溝の内部全体は，電子の外部にある場と定性的には同じ種類の場によって満たされているかも

しれない．しかしまた，この溝は底がわからないほどに深いものかもしれない．ミーの考えかたは，物質を場に還元すること，つまり物質の正体を場の理論の立場から解明しようとするものである．これに対して他の考えかたは，物質を，いうなれば場に対立させる立場である．この考えにしたがえば，物質は場を規定するひとつの原動力であり，それ自身は空間的な，確定したひろがりをもったものではなく，ただひとつの特定の空間的な領域の中に潜んでいる．その領域とはそこから物質の場に対する作用が発生している場所である．したがってわれわれは“ここに電荷がある”ということはできない．そのかわりに“この閉曲面が電荷を包囲している”というべきである．これに対してミーの見解に従えば，ある瞬間（世界のひとつの 3 次元的な切口）において物質も含めた場の状態は任意に指定されるべきものである．自然法則はこの全系のそれ以後の状態（ならびにそれ以前の状態）がどのように規則的に発展してゆくかだけをわれわれに教えるにすぎない．ところがわれわれの経験によれば，物質が場を生みだし，またその状態を一意的に規定することは疑いの余地のないほどに明白なように思われる．われわれが状態を意のままに整えるのには，常にまず第一に物質の調整に手をつけねばならない．ただ物質を媒介としてはじめて場の状態を調整することができる．そこで，実際，自然現象を説明するためには，われわれには 2 種類の法則が必要となる．（1）場の法則．すなわち場のある可能な状態において，場の内部にある任意の隣接し

た2点における場の状態の間の関連を規定する法則である．この法則のおかげで場は自分ひとりで作用を伝播させることが可能となる．(2) **物質が場を励起する法則**．電子をとりまく場に対して，いままで述べたわれわれの扱いかたはこのような法則に関する（たどたどしいものではあるが）最初の公式化といえよう．この問題は物質に関する現代物理学の活躍すべき舞台である．特に**作用量子**の事実と謎はこの問題に属したことであろう．ここで因果律とは，世界のある切口（$x^0=$一定）における世界の状態が，未来および過去における状態を決定することを意味するものとすれば，今日の物理学はこの意味の因果律がなりたつことに対してなんらの証拠も提供していないと断言すべきであろう．物質が作用を送りだすさいの規則性は，われわれが今日判断できるかぎりでは，ただ統計的になりたつものと受けとるべきものである．――もし，ミーの観点とは逆に，物質を場に対立したひとつの“実在”とするならば，この考えは，物質が場を生みだすというわれわれの経験とよりよく合致するものである．すべての物質的個体を外的世界のなかで，互いに作用しあうひとつの体系にまとめている仲介者としての場，このような場の状態の原因が上に述べた“実在”である限りにおいて，この“実在”（源）をわれわれは“物質”とよぶことにする．しかしこの“源”の内的本質をかえりみるならば，それを“物質”と呼んでよいのと同様に，“生命”あるいは“意志”と呼んでもさしつかえないであろう [33]．

もしミーの見解が正しいならば，ただ場のなかにのみ客観的な現実性が認められることになる．また物理学にとって，その窮極の目標は，もはやそう遠くにはないことになろう．ここにいう窮極の目標とは，物理学的世界の本質，また物質や力の本質を完全に把握できるように，物理学がわれわれにそれらの本質を教示し，その結果，それらに対するわれわれの知識から，合理的な必然性をもって，自然現象の経過を律する自然法則が一意的に導かれるようになることである．しかしいまは，当分，このような，だいそれた希望をもつことは許されない．物質を場の源とみなす考えは厳密な機能的な場の法則とならんで物質の量子統計学を持ちこむ余地を残している．この意味からこの物質観の長所は上に述べたような点には存在しない（すなわちこの物質観からは自然法則がどうあるべきかは一意的にはきめられない）．物質の物理学はまた**過去→未来という時間の特別な方向**について解答をあたえるべきであろう．時間の流れに特別な向きがあるということは基本的な事実である．これは原因という概念と密接に結びついている．しかし現在知られている場の法則は時間の反転に対して不変であるために，この重要な事実を場の物理学のワクのなかでは説明できない．エーテルの中（真空中のこと）においても入射球面電磁波と同じように発散球面波も存在しうる．しかしボーアの原子論によって，中心にある１個の原子のなかの電子が軌道遷移を行なってエネルギーを放出した場合には，ただ発散球面波だけが出現する．

§ 39　連結性に関する世界の大域的性質（宇宙論）

静電気学や，ニュートンの重力論において，これらの力の近接作用的な表現は $\Delta\varphi = -\rho$ であたえられる．しかしもし φ に対して無限遠点における境界条件が与えられていないならば，このポアッソン型の微分方程式は現実を明確には表現しないことがすでに早くから知られている．なんとなれば，ρ が与えられているとしても，この方程式の解は，正しいポテンシャル関数

$$\varphi = \int \frac{\rho}{4\pi r} dV$$

ばかりでなく，それに同次方程式 $\Delta\varphi = 0$ の解，すなわち任意の調和関数をつけ加えてもかまわないからである．もし球対称の場に制限されているときは，$\Delta\varphi = 0$ の解で，球対称の正則解は $\varphi =$ 一定数 にかぎるという事情のために，上に述べた事実はかくされてしまう．アインシュタインの重力論においてもまったく同様な事情が存在する．§33 に述べたことによると，重力場の源である質点から非常に遠ざかれば，計量場は次第に攪乱を受けない特殊相対性理論の計量に近づくべきことが場の法則からあたかも必然的に導かれるかのように見える．もし同じ空間のなかに 2 個の質点を考えるならば，これらの質点の特性定数である m が一致すべき理由がないと同じように，それぞれの質点の漸近域において光の速度がいずれも c とならねばならない理由は見あたらない．すべての物体を包囲している空間が

（漸近域において）共通な，ほとんど一様な計量場をもつということの原因は，もちろん各物体の中にあるのではない．すなわち各物体の内部場の表面から出てくる性質ではない．これはむしろ**無限遠における計量場の境界**の性質にもとづく．そこからひとつの驚くべき力が世界のすべてのできごとの上に，それらを静めるように作用する．このことは一般相対性理論の原理と矛盾するものではない．しかし物質が場のすべての状態の原因であるべきであるという要請には矛盾している．後者の要請を満足するためには，空間は閉じている，つまり無限の遠方までひろがっていないものと仮定する必要がある．無限にひろがった平面の場合にはポテンシャルの微分方程式は無限に多数の解をもつ．これに対して閉じた球面上では，それはただひとつの解 $\varphi=$ 一定 をもつにすぎない．一般相対性理論は，開いた空間を閉じた空間におきかえる可能性をわれわれに与えてくれる．

実際一般相対性理論においては，世界点を 1 対 1，連続的に 4 個の座標 x^i によって表わすことができるかどうかについては何も規定されていない．一般相対性理論が仮定したことは，任意の 1 個の世界点の近傍に限れば，この近傍に属する世界点を 4 次元“数空間”の上に 1 対 1，連続的に写像することができるということである（ここで 4 次元“数空間”の“点”とは，4 個の x^i の組をさすものとする）；しかし世界全体の関連については，一般相対性理論はもともとなんらの仮定も設けなかった．——たとえば曲面論においてある曲面のパラメーター表示を考えてみよ

う．その場合，パラメーター表示は常に，曲面のある一部分だけを表示するもので，曲面全体をひとつの表示法で表わすことは一般にはできない．すなわち曲面全体を一意的に，また連続的にユークリッド的平面の上に，あるいは平面の一部分の上に写像することはできない．すべての1対1連続写像に際して，曲面のいかなる性質が保持されるかということは，位相幾何学（Analysis situs）の取り扱うべき主要な問題である．たとえば曲面が“閉じている”という性質は位相幾何学的性質の一例である．球面を連続的に変形して作りだされる曲面は位相幾何学の観点にたてば，球面と何の差違もない．しかしそれはトーラス面[22]とは異なる．トーラス面上には閉曲線を描いても，これによってトーラス面を2個の部分に分割しないようにできる（つまりそのような特殊な閉曲線が存在する）．これに対して球面上ではいかなる閉曲線も必ず球面を二分する．球面上の幾何学からは，球のすべての直径の両端にある点を同一点とみなすことによって，“球的幾何学”が生まれる．これは§10に述べたように，リーマンの考えに従えば，ボーヤイ－ロバチェフスキーの幾何学に対立するものである．上のような手続きによって生まれた面 $\boldsymbol{F}$ は，位相幾何学的にみて，球面とは別種のものである．なぜなら面 $\boldsymbol{F}$ は“一面性”（Einseitigkeit）をもっているが，球面にはこの性質がない．ここで“一面性”とはつぎのような性質である．い

22）　ドーナッツの表面のような曲面のこと：訳者

まある曲面の上によこたわっているひとつの小さな輪を考えよう．この小輪は面に密着したまま常に一定の向きに回転しながら曲面上を動きまわっているものとする．この小輪の中心が曲面上にひとつの閉曲線を描いて，再び出発点にたちもどったとすれば，小輪はそこで，出発前と同じ向きの回転をしていると想像するべきであろう．小輪の中心がこの曲面上にどのような閉曲線を描こうとも常に小輪の回転の向きが出発前のままにたもたれているときは，この曲面を“**二面的**”（zweiseitig）という．そうでない場合にはこの曲面は“**一面的**”（einseitig）といわれる．一面的な曲面が存在することをはじめて指摘したのはメービウスである．上述の曲面 $\boldsymbol{F}$ は一面的であるが，球面はもちろん二面的である．いま小輪の中心を球の大円にそって移動させたとすれば，曲面が球面の場合にはこの軌道が閉曲線となるためには，小輪の中心は大円を一周しなければならない．これに反して曲面を $\boldsymbol{F}$ とするならば，輪の中心点は大円の半分，すなわち半円を描けば十分である．2 次元曲面とまったく同じように，4 次元多様体も非常に多種類の位相幾何学的性質をもっている．任意の 4 次元多様体ではその中の任意の 1 点の近傍は，近傍内の異なる点には，異なる座標（4 個の数の組）が対応するように，座標により表現される．4 次元世界座標もまさにこの意味において使用されねばならない．

われわれの空間が無限にひろがっているためにおこる困難については，すでに昔からしばしば議論された．いま質

量が空間の中に，平均において一様な密度で分布しているとすれば，ニュートンの重力論によれば，空間のいたるところで無限に高い重力ポテンシャルが存在することになる．われわれの最も近くにある大きな質量の物体，すなわち地球，月，あるいは太陽がわれわれを引っぱるよりもずっと大きな力で，無限の遠方にある質量がわれわれに絶対的な影響をあたえる．また同様の理由から天空は無限に明るい．一方，これとは逆に，この空間はそのある限られた部分だけが，(0 ではない) 有限の値の密度の物質で満たされているという描像，すなわち星が宇宙の中のある有限の部分にだけ局在しているという描像も不満足なものであることが判明した．このようなディレンマの打開策として，ニュートンの万有引力の法則の修正が提唱された[23)]．近接作用論の立場からみれば，この修正は簡単につぎのように実施できる．すなわち重力ポテンシャル Φ に対する方程式 $\Delta\Phi=0$ を $\Delta\Phi-\lambda\Phi=0$ におきかえればよい．ここで λ はひとつの正の定数である．もとのポテンシャルの方程式の基本解 $1/r$ に対応する，修正された方程式の基本解は明らかに $e^{-r\sqrt{\lambda}}/r$ である．この解が，r の増大とともに，指数関数的に減少することは極端に遠方にある質量からの作用を消滅させる．

---

23) これとは別の考えかたとして，ランベルトの考察にもとづくひとつの試みがある．それは無数にある物質系にある階級制を仮定することによって上述の困難を克服しようとするものである．この試みは新たに，すなわち C.V.L.Charlier によって踏襲された [Ark. för Mat. Astr. och Fys.16 (1922), Nr.22].

アインシュタインはこのような基本的な考えかたを彼自身の重力論［34］に持ちこんだ．実際，§30 で重力場の方程式を導いたさいに，われわれはなすべきことをしないという小さなあやまちを犯した．g_{ik}，およびこれの 1 階，2 階の微係数からできている不変量で，2 階微係数については一次式である最も一般なものは，R ではなくて，$\alpha R+\beta$ の形をした量である．ここで α, β は任意の定数である．したがって重力場の作用量として最も一般的なものは $G+\lambda\sqrt{g}$ の積分である．この定数 λ を 0 とおくことに対しては，元来なんらの理由もなかった．そこでこの λ を残しておけば——電荷は，宇宙の構造について議論するさいには何の役目をも演じないから，これをまったく無視することにする——重力場の方程式は

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)-\lambda g_{ik}=0 \qquad (75)$$

となる．そこで，さきにニュートンの理論においてポテンシャルの方程式につけ加えたものとまったく同じような付加項がアインシュタインの方程式でも導かれたことになる．

さてこれから §33（48）のように中心 O に対して静的球対称な（75）の解を求めてみよう．§33 に用いた記号を使うと，変分原理はつぎのようになる：

$$\delta\int(\omega\Delta'+\lambda\Delta\cdot r^2)dr=0.$$

ω については変分からは，前と同様に $\Delta=1$ が導かれる．一方，Δ の変分からは

$$\omega' = \lambda \cdot r^2$$

となる．$r=0$ で解が正則であると要請すれば，

$$\omega = \frac{\lambda}{3} r^3.$$

したがって

$$\frac{1}{h^2} = f^2 = 1 - \frac{r^2}{a^2}, \qquad \left(a^2 = \frac{3}{\lambda}\right).$$

そこでもし λ を正の定数とすれば，実際，ひとつの**閉じた空間**がここに出現する．この場合には $d\sigma^2$ は，仮想的な 4 次元ユークリッド空間の中にある球の表面（3 次元）上の計量基本形式に一致する：

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + z^2 = a^2,$$

$$d\sigma^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dz)^2. \qquad (76)$$

点 O（すなわち $x^1 = x^2 = x^3 = 0$）を極，$z=0$ を**空間の赤道**と呼ぶことにしよう．極から赤道まで行くにつれて，光の速度は簡単な法則

$$f = z/a \qquad (76')$$

によって 1 から 0 まで減少する．したがって赤道上のすべての点は世界の計量基本形式の特異点である．この事実からアインシュタインは，もし**“宇宙論的”重力場の方程式** (75)（ただし $\lambda > 0$）**を承認するならば，世界の中には質量が存在しなければならない**という結論をひきだした．実際，統計的に平衡状態にある物質が，空間の中に一様な密度で分布しうることがわかる．いま宇宙の中に，互いに独

立に浮遊している多数の星の全体を，（宇宙的な物さしで考えて）一定の密度 μ_0 の連続的な流体であるとみなす．さらにその圧力 p は恒等的に 0 として，この場合に対する修正された重力場の方程式の解を求めてみよう．これに対する変分原理は本書下巻の 106 ページに与えた方程式の $\kappa\mu_0$ を $\kappa\mu_0+\lambda$ におきかえたものとまったく同じである．それゆえ，われわれは再び球的空間を得る．その半径 b は

$$b^2 = \frac{3}{\kappa\mu_0+\lambda}$$

であたえられる．さらにつぎの関係がなりたつ．

$$(\mu_0+p)\,f = v = \text{const.} \qquad (\text{運動量の法則}),$$

$$f = \frac{3\kappa v}{2(\kappa\mu_0+\lambda)} + \frac{\text{const.}}{h}.$$

ここで p は 0 であるから，$f=$一定 となる．この結論は計算をするまでもなく，明らかである．なんとなれば，物質は重力ポテンシャル f だけの影響の下に運動をするからである〔したがって平衡状態にあるためにはポテンシャルは一定でなければならない：訳者〕．$f=1$ とおけば $v=\mu_0$ となる．したがって

$$3\kappa v = 2(\kappa\mu_0+\lambda), \qquad \text{つまり} \quad \kappa\mu_0 = 2\lambda.$$

いま半径 $b=1/\sqrt{\lambda}$ の球の自然体積（natürliches Volumen）[24] に μ_0 をかけたものが全質量 M であるとすれば，

24）　訳者注：自然体積は 4 次元ユークリッド空間内にある半径 b の球面（76）の全表面積で与えられるとすれば $2\pi^2 b^3$ に等しい．因数 2 は北半球のみならず南半球の表面積も計算にいれたために，

M に対応する重力半径は

$$\kappa M = \kappa\mu_0 \frac{2\pi^2}{(\sqrt{\lambda})^3} = \frac{4\pi^2}{\sqrt{\lambda}}. \tag{77}$$

したがって宇宙の全質量の重力半径は世界球の半径の程度の大きさである．従来の理論で，宇宙の涯にある“地平線”が演じていた役目を，アインシュタインの宇宙論ではこの巨大な質量がかわってになってくれることになる．すなわち慣性場の基底として一様な場が存在するのはこの質量にもとづくことである．これはたとえばフーコー振子の振動平面を固定する役目をする．その結果，振子の振動面に相対的に星空の回転があらわれる．

すべての星が全体として静止しており，また一様に分布しているひとつの閉じた空間は，理想的な平衡状態を示している．現実の世界は大体，このような理想的状態に近いと考えてよい．これは静止した箱の中に閉じこめられた気体が，ほとんど常に熱力学的平衡状態にあるのと同じ理由による．これと同じ統計的意味において上に述べたことを理解すべきである．熱力学的平衡状態にある気体の場合には，気体の分子は，箱の内部を一様な密度で満たしている．また箱の中の各点において分子は，平均において静止している．またその速度はよく知られたマックスウェルの速度分布に従う．星の相対速度が光の速度よりも小さいのはなぜか，またわれわれの恒星系が無限の遠方まで飛びちるよ

出てきたものである．

うなことがないのはなぜかという疑問に対しては，上のような考えかたからその説明があたえられるべきであろう．ところでこの世界にたまたま存在する物質の全質量が，重力の法則に登場する定数 λ と，(77) のような関係で結ばれねばならないということは理解に苦しむことである．しかし，もし定数 λ は自然法則によって規定されるべきものではないと仮定するならば，この困難は解消する．それには重力の法則をつぎのように数式化すればよい：4 次元世界のある限られた領域の外では 0 となるような無限小変分 δg_{ik} に対して，変分原理

$$\delta\int \mathbf{G}dx = 0$$

がなりたつ．ただし積分域の 4 次元的体積は変分に際して不変にたもたれるという条件

$$\delta\int \sqrt{g}dx = 0$$

をつける（すなわち条件つきの変分原理）．——それにしても，(76) で与えられる“球面”の全体が現実の 3 次元空間の 1 対 1 写像であるのか，あるいはこの“球面”上で，すべての直径の両端にある点は，現実の空間の同一の点に対応すると考えるべきかは未定のまま残る．

たとえ空間の“赤道”部分に物質の質量が集中したとしても，もし“赤道”における計量場の特異点がとり除かれるならば，全宇宙の質量は (77) に与えられた程度の大きさで，これ以上に大きな値にはなりえない [35]．この結論

は，大きな重い中空の球が自転しているときこの球殻がその中心部にある質量にあたえる作用についてのティリングの研究結果に合致する．すなわちこの球殻の自転は遠心力に似た力を引きおこす．しかしこの力には，[球殻の重力半径]/[球殻の幾何学的半径] という非常に小さな因数が含まれている．これに対して上述の世界球ではこの因数は ～1 の程度になる．つまり宇宙の重力半径はその幾何学的な直径と同じ程度に大きなものである．——中心 O にある中性，または電荷をもった物体をとりまく静的球対称重力場は，宇宙論的な λ-項がある場合でも，前と同様にして容易に計算される．その場合，常に制限（77）によって質量に限界を設ける必要があることがわかる．

アインシュタインの宇宙論はすべての点で非常に魅惑的ではあるが，しかしなおそれに対して重大な疑点がある．第一の問題点はつぎのことである．われわれは分光学的判断にもとづいて，星に年齢をつける．それゆえ，恒星系が煙霧のように消滅することはないとは決していわない．ただ星の消滅がおこるためには，いまのところ，恒星はあまりにも若すぎるから，そのような事態が起こらなかったにすぎない．星の分布に対するわれわれの観測結果によれば，現在の星空の状態はいまのところ，“統計的終局状態”にはなっていない [36]．星の速度が小さいことは，前に述べた考えに反して，気体の場合のような熱力学的平均化にもとづくというよりは，むしろひとつの共通な原因に由来しているようにみえる．また遠方の星ほど平均において大き

な速度をもっていることが発見された．天文学的観測事実は，一様な質量分布のかわりに，個々の星雲がさらに遠方の虚空の中へ引きこまれていくという見方をわれわれに示しているように思われる．

第二の問題点として，ド・ジッター [37] の注意を思いおこそう．彼は，アインシュタインの宇宙論的重力場の方程式がひとつの非常に簡単な正則解をもつことを示した．すなわち物質が存在しない世界も λ-項をもつアインシュタイン方程式と両立しうることを示した．それは 0 でない曲率をもった計量的に一様な世界である．いま 5 個の変数 $x^1 \sim x^5$ の縮退していない定数係数の二次形式を $\Omega(x)$ とする．計量基本形式が $ds^2 = -\Omega(dx)$ であたえられる 5 次元ユークリッド空間のなかに“回転双曲面” $\Omega(x) = a^2$ を考えれば，この曲面は計量的に一様な 4 次元リーマン多様体である．この 4 次元多様体が 1 個の正次元，3 個の負次元をもつためには，Ω に対しては 4 個の正次元，1 個の負次元をもつと仮定すればよい：したがって

$$\Omega(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 - (x^5)^2.$$

これに対応して，双曲面上での 4 階曲率テンソルは

$$R^i_{k\alpha\beta} = -\frac{1}{a^2}(\delta^i_a g_{k\beta} - \delta^i_\beta g_{ka}).$$

したがって

$$R_{ik} = R^\alpha_{iak} = -\frac{3}{a^2} g_{ik}, \qquad R = R^i_i = -\frac{12}{a^2}$$

となる．そこで方程式（75）は，$\lambda = 3/a^2$ とおけば満足さ

れる．この解はド・ジッターの“**双曲面的世界**”とよばれ，前に述べたアインシュタインの“**円筒状世界**”に対立するものである．——アインシュタインの解は x^1, x^2, x^3, z, t を座標にもつ 5 次元ユークリッド空間内の 3 次元的球を底として，t - 軸の方向に立てた無限に長い円筒で表わされる．

上に述べたド・ジッターの解は“円筒型解”(76)，(76′) と密接な関係がある．すなわち，いま

$$x^4 = z \cdot \cosh\frac{t}{a}, \qquad x^5 = z \cdot \sinh\frac{t}{a} \tag{78}$$

とおけば，上述の双曲面は

$$\Omega(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + z^2 = a^2$$

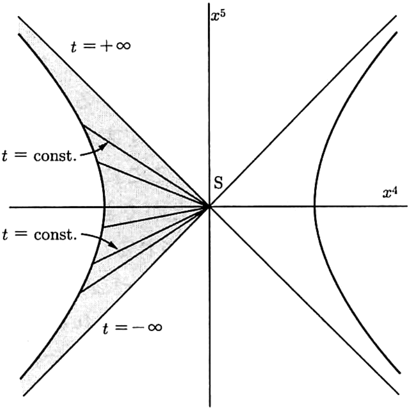
となる．また計量基本形式は

$$-ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dz)^2 - \left(\frac{z}{a}\right)^2 dt^2.$$

したがって (76)，(76′) と完全に一致する．しかし上のように定義された静的座標 x^1, x^2, x^3, t は，ただ楔(くさび)型の部分 $(x^4)^2 - (x^5)^2 > 0$ の中に含まれているド・ジッターの回転双曲面 $\Omega(x) = a^2$ の部分だけを表わす．もし 2 個の空間座標 x^1, x^2 を省略すれば，ここに述べたことを直観的にわかりやすく図示することができる．楔の刃（そこは $x^4 = 0$，$x^5 = 0$ によって表わされる）に相当する部分が x^3 - 軸になる．楔を傾めに切る平面 $x^4/x^5 = \text{const.}$ と双曲面の交わりは第 22 図では直線で表わされる．これは前述の円筒に対しては $t =$ 一定 という切口を示す．特に楔の面 $x^4 - x^5 = 0$，$x^4 + x^5 = 0$ は円筒の無限に遠方にある天

井と底 $t=\pm\infty$ を示す．これに対して楔の刃が双曲面を貫く点 S は $x^4=x^5=0$，$x^3=\pm a$ で表わされる．これは円筒面上の 2 本の母線 $x^3=\pm a$，$t=$ 任意 に相当する．——それはともかく，(78) という，変数のおきかえをする前に，$\Omega(x)$ を不変に保つような $x^1\sim x^5$ に対する一次同次変換を行なうことができる．その結果に上述の手続きを行なえば，無数に多くの異なる静的座標系が存在する．これらの各静的座標系は，それぞれ異なった楔形によって，不変な双曲面から，それぞれ異なる部分を切りとる．この切りとられたそれぞれの双曲面の部分がそれぞれの静的座標系を用いた円筒面で表わされることになる．

ド・ジッターの解は，全体として，静的解ではない．こ



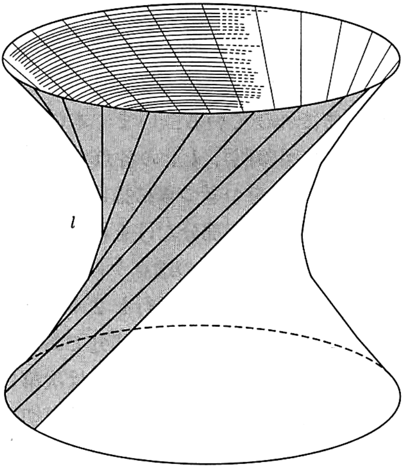
第 22 図

のことは，ただ一方的に静的解だけを求めるという考えかたを放棄すべきことをわれわれにうながすものである．さらに“空間的に閉じている”という要請が 4 次元世界の位相幾何学に対して本来，いかなる意味をもつかについて考察すべきことを示す．もともとの 4 次元数空間は，ひとつの無限遠方にある単連結の境界をもっている．しかし“閉じた空間”の要請は，**世界の境界が二つに分れるべきこと**を要求する．すなわち**無限の過去**（$-\infty$），**と無限の未来**（$+\infty$）という二つの境界である．円筒も双曲面もたしかにこの特性をもっている．世界の計量的構造ではなく，その位相幾何学的性質をしらべることによってはじめて，**世界が永遠の過去から永遠の未来に向かってひろがっている**ことが，正しくわれわれの考慮の中にとりいれられたことになる．4 次元数空間と同じ連結性をもつ世界においては，つぎのような計量場を設けることは容易にできる．すなわち 1 点 O の受動的過去を表わす円錐を過去の方に向かってどこまでもひろげてゆくとき，ついには点 O 自身がこの円錐の内側に包みこまれるような計量場である．このような計量場が設置されると，それにより，同じ人が同時に別々の場所に姿を現わしたり，あるいは一人の人間が自分自身に邂逅するというゾッとする出来事がおこりうることになる．しかし現実の世界は数空間とは異なり，二つに分れた境界（涯（ハテ））をもっている．その結果，すべてのゼロ測地線はひとつの方向では $-\infty$ の涯に向かって，また別の方向では，$+\infty$ の涯に向かって伸びるべきであるという簡単な

要請によって，上述のような奇妙なことを阻止できる．またこの要請によって，すべてのゼロ測地線（および曲線のどの部分でもその方向が時間的であるようなすべての曲線）には一意的にきまった向きが与えられることになる．——円筒も双曲面も過去および未来という二つの涯を持っている．一様な密度の物質で満たされている円筒状世界では（そこでは $f=1$ である），過去に向かって伸びたゼロ円錐は無限回にわたって自分自身の上に覆いかぶさる（この事情は x^1, x^2 座標を省略すれば直観的にわかりやすくなる．その場合には円筒面上の 1 点を通り，円筒面にまきついた 2 本の螺旋（らせん）がゼロ円錐面に相当する．この螺旋は円筒の母線と $\pm 45°$ の交角で交わり，一方は左巻き，他は右巻きである．円筒面上でこれら両螺旋にはさまれた部分は，筍の皮のように何回も重なっている）．したがって，天空の中に同じ星の像が何個も見えることになる．それらの像はいろいろの時代における同じ星の姿を示すものである．この各時代の間には光がこの閉じた空間を一周するのに要するだけの時間的へだたりがある．このような世界では遠く過ぎ去ったものの幻がわれわれのなかをウロつきまわっている．もしこのような幻が知覚されえないほどにボンヤリしたものであると仮定するならば，星が放出ならびに吸収する光の量が平均において同じ程度であると考えてよいほどに，その虚像の発するボンヤリした光は弱いものでなければならない．したがって黒体の空洞放射の場合と同じように，この宇宙には光の平衡状態が存在していなければならない．こ

れに対して双曲面的世界では事情がまったく異なる［点O を頂点とするゼロ円錐面は，x^1, x^2 を省略した場合に，O を通る2本の双曲面の母線（直線）で表わされる］；ド・ジッターの双曲面的世界は，二つの涯（ハテ），過去と未来をもつ．しかしまたゼロ円錐が自己の上に重なることのないようにできている．この世界像はアインシュタインの円筒状世界より考えのうえで，はるかに自由さに富んだものである．この世界像のすばらしい特性はこのことと密接な関係がある．この双曲面上の測地線は，座標原点を通る平面と双曲面の交線で与えられる［また x^1, x^2 座標を省略すれば，双曲面は計量基本形式が $-ds^2=(dx^3)^2+(dx^4)^2-(dx^5)^2$ であたえられる3次元ユークリッド空間の中にある曲面 $(x^3)^2+(x^4)^2-(x^5)^2=a^2$ で与えられる］：時間的測地線は原点を通る平面で，(x^3, x^4) 平面との間の角が 45° より大きい平面が双曲面と交わってできる双曲線である．これは $-\infty$ から $+\infty$ まで伸びている．いま1本の時間的測地線を $\boldsymbol{l}$ とする（第23図参照）．$\boldsymbol{l}$ 上の各点から未来に向かって開いているゼロ円錐をつぎつぎに描けば，これらすべてのゼロ円錐は双曲面上の一部分だけを覆う．それは2本の互いに平行な母線〔$\boldsymbol{l}$ の $-\infty$ の端点から引かれた2本のゼロ測地線（母線）がここにいう平行な2本の母線である：訳者〕の間にはさまれた双曲面上の部分である．双曲面上のこの部分は下（$-\infty$）の方に向かっては次第に狭くなり $x^5=$ 一定 (<0) という平面による双曲面の切口（円）の全円周に比べれば無限小といえるほどにせまくなる〔訳者

注：$x^5=$ 一定 (<0) という平面による切口を考えるとき，この領域の幅は大体 $2a$ の程度で一定である．双曲面の切口は $|x^5|$ が十分に大きいときは大体半径 $|x^5|$ の円となるから，その周囲は $2\pi|x^5|$ となる．これに対して $x^5>0$ のときは，領域の幅はおよそ $2\pi x^5-2a$ となる〕．逆に上（$+\infty$）の方に向かってはこの領域の幅は次第に広くなり，ほとんど双曲面の全域を覆う．第 23 図では測地線 $\boldsymbol{l}$ は，簡単のために，図の左側の輪郭の双曲線としてある．ここで黒く塗った部分が上述の特別な領域である．この領域を $\boldsymbol{l}$ の“作用域”とよぶことにする．実は $\boldsymbol{l}$ の他に ∞^3 本の測地線が皆この同じ作用域を共有している．これらの測地線は未来



第 23 図

に向かって放散するひとつの束をなしている．この束に属する測地線はあるひとつの過去に向かう方向にすべて収束する．この収束の方向によってこのような測地線の束を区別することにすれば，そのような束は全体で ∞^3 個ある．——無限にひろがった普通の 4 次元空間では，あるきまった方向に平行な直線は ∞^3 本存在する．これらの平行直線を一束にするとき，これらの束をそれに属する直線の方向で区別することにすれば，異なる束の総数は，異なる方向と同数，つまり ∞^3 個存在する．この事情は双曲面について上に述べたことにまさに対応する．二つの物質片は，その世界線が同じ束に属するときに限って，はじめから互いに作用し合うことができる．世界線がそれぞれ異なる束に属する場合には，それぞれの歴史が発展していく過程において両者の作用域が因果的に交叉する段階ではじめて両者の相互作用がはじまる．われわれが知っている星はすべてただひとつのこのような束に属しているとすることは，一番，簡単な仮定といえよう．この仮定に従えば，星の速度の小さいことがすべての星に共通な原因にもとづくものであるという考えも納得しやすいものとなる（なおド・ジッターの双曲面的宇宙にもとづく興味ある天文学的結論については付録 III を参照されよ）．

ド・ジッターの解を採用すれば，この世界に物質が存在すべきであるという要請をわれわれは放棄しなければならない．しかしこの解は，アインシュタインの宇宙論の基礎に対してひとつの批判を与えるものといえる．そしてこの

批判こそ，おそらくアインシュタインの理論に対する決定的な反論であろう．その批判とはすなわち，ひとつの静止している荷電物体が $\frac{e}{r}$ というポテンシャルをもつ静電場によってとりかこまれているということの根拠が空間的な無限遠における境界条件とは何の関係もないということである．この場合にもわれわれは一方的な“静的”という観点にとらわれてはならない．いま電荷をもったある物理系が真空の中で1時間前までは，運動をしていたとする．その系が，1時間前から静止を続けたとすれば，この系を中心として 半径＝1光時＝約 10^9 km の球の内部だけがクーロン場で支配されることになる．1時間前から成長しつつある静電場の状態は，荷電体を中心として四方へ光速度をもって拡がる．この状態が空間の涯（地平線）まで到達したとき，つまり球状空間の全域を覆ったときはじめて平衡状態（完全な静電場）が回復される．ここでなぜ空間的境界で静電ポテンシャルが0になるかという質問のかわりに，遅延ポテンシャルの中に登場する時間の流れの特別な方向は何に由来するのかという質問が生まれる．たとえばいまつぎのような過程を考えてみよう．いまひとつの電気的に中性な物体からある電荷を切り離し，それを母体から遠くはなれた場所に静置する．しばらくたってからこの電荷を，それが切り離された操作とちょうど逆の手順でもとの母体に帰されたとする．電磁場の法則によれば，このような過程によって，遅延ポテンシャルで表わされる電磁場が発生し，それは外部に向かって放射される．ただし，ここでこ

のような過程がはじまる以前には空間の中には電磁場が存在しなかったと仮定する．ところで電磁場の法則だけによれば，上のように引きおこされた電磁場の励起状態は決して消滅しない（あるいは逆に，この過程が完了した後には，空間の中に電磁場が存在しないと仮定すれば，過程以前に入射した波で，しかも自己を消滅させるような波が存在したことになる）．ここに述べたことはただ，巨視的に観測されるようなスケールの大きな物体に対してだけ適用できる――たとえば放送局がある瞬間から電波の放射をはじめ，しばらくしてから，放送を中止した場合には，上述のことがなりたつ．しかし電子ではこのようなことはいえない．電子にはその電磁的作用を開始した最初の瞬間というものがない――とはいうものの，上述のことからつぎのことがわかる．すなわち，**場に対する束縛条件は空間的な境界に由来するのではなく，むしろ時間的な境界である過去，つまりわれわれの背後にある世界の涯（$-\infty$）から生まれる**ということは確かである．このことはアインシュタインの宇宙論でもなりたつ．したがって物体の慣性が無限の遠方にある物質に由来するという考えをアインシュタインの理論から導くことができるとは私には思えない．

物質が計量場を生みだすという原理は，“すべての物質から遠くはなれたところでは，または，すべての物質が消滅した場合には慣性場は存在しない”ことを意味するものではない．そのときは場は不定になる．しかしもし上の“……”のなかに述べたことを必要と考えるならば，首尾一貫

するためには，電磁場に対しても同じ要請をするべきである．物質が消滅すれば電磁場も0になるということは誰でも仮定することである．しかし $\Delta\varphi_i=0$ という方程式は，一般に“電磁場が存在しない”ということを表わしているのではない．これはむしろある特定な“静的状態”にある場を表わすものである．ここにいう特定な“静的状態”とは，場のすべての可能な状態に連続的に適合できる状態のことである．これに対して，計量場の特定な“静的状態”はド・ジッターの双曲面上でなりたつ一様な計量場である．そこでわれわれの経験に一致するように，すべての物体から非常に遠くはなれたところではこのような一様な状態にある計量場によって支配されるものと仮定しよう（ここにいたって，本章のはじめの§29で述べた空間の中の“上・下”という絶対方向に対する問題と重力場に対する考えかたの間の類似性に関して述べた注意はその本質的な点で，具合の悪いものとなった．§29では背景にある一様な計量場と，それからのズレというような考えかたを否定したが，いま再びその考えにたちもどったわけである）．ここでエーテルという昔の描像を再び登場させることは，都合がよい．しかしここでは新たに，物質的な媒質として再登場するのではない．物質が全然存在しない場所における（上述の意味の）一様な計量場と特定な“静的状態”にある電磁場を“エーテルの状態”と呼ぶことにする［38］．物質とエーテルの間の関係は，生産者と生産された物の関係ではない．むしろエーテルと物質の間の関係は平らな海面と，その上

に浮いている船の関係に似ている．船が海面に波をおこすように，物質はもともと静止状態にあったエーテルを単に励起するにすぎない．ド・ジッターの双曲面上で，エーテルが一様な静止状態にある領域は，無限の遠方にある過去（$-\infty$）に向かって，次第に広くなる．これに対して励起された状態にある孤立領域は過去にさかのぼるほど，そのひろがりが，静止領域に比べてますます狭くなる．逆に未来に向かっては，多くの励起された領域が互いに重なり合い，ほとんど双曲面の全域を覆う．電場の励起に関してはじめにわれわれが説明した考えかたは，双曲面的世界においては，物質の窮極的構成要素である素粒子による場の永遠に続く励起に対しても（以前には巨視的な物体による電磁場の励起にしか適用できないという注意をのべたが）適用されうる．世界は永遠の静寂から生まれる．しかし物質という名の原動力を自由に駆使する“活動の精神”によって，励起された世界は決して再び静寂にはもどらない．世界の過去はわれわれの背後に隔絶されている．しかし何人もその束縛力からのがれることはできない．世界は未来（$+\infty$）に向かっては開かれている．そしてわれわれにとっては予見できないものである．将来に向かって，この世界に“境界条件”を課すことは無謀もはなはだしいことである！

アインシュタインの宇宙論も，またド・ジッターのそれもともに，目下のところ物理的にみて不満足である．どちらが正しいかについて，最終的判断を下すことはなおさきに延ばすべきである．アインシュタインの世界の中に，わ

れわれが1個の質点，引力の中心となる1個の物体を挿入するや，ただちにそれは，もとからそのまわりにあった物質を引っ張る；その場合，これらまわりの物質が，挿入された質点に突進すること，つまり質量が1個所に凝集することがどのようにして回避されるかについて正しい現象論的説明を見つけることは非常にむずかしい．たとえば非圧縮性流体のように，一種の反撥力を導入することは，計算してみればわかるようにこの重力的凝集を防止するのには不十分である．一方，ド・ジッターの世界で1個の質点が存在する場合に相当する解（この質点の質量が0になるとともに，この解は既にわれわれが知っている一様な双曲面を示す解に一致するものとする）はまだ見つかっていない．それゆえ，物理学においては，$\lambda=0$ という極限の場合を常に仮定しなければならない．それにもかかわらず，ド・ジッターの世界に関する問題は議論されねばならない．なぜなら，この理論はガリレイの慣性場の由来と密接に結びついているからである．**慣性羅針儀と，恒星羅針儀がほとんど完全に一致するのは**なぜかという質問に対して私の知っている答はつぎのもの以外にはない．物質は“母なるエーテル”をごくわずかな程度に攪乱することができるにすぎない．存在する物質の量が少なければ少ないほど，両種の羅針儀の一致はそれだけ，より完全なものとなる[25]．しか

25) 訳者注：アインシュタインの方程式で λ-項がない場合を考える．もし物質が全然存在しなければ，いたるところ一様な解はユークリッド型の $\overset{0}{g}_{ik}$ である．その場合には両種の羅針儀の方向

し反面，ド・ジッターの宇宙論では説明できないつぎのようなことも起こりうる．いまある物体の描く“自然な軌道”から，この物体を偏移させようとする外力に対するこの物体の抵抗の強さ，つまり物体の慣性係数 m/κ が他の物体の質量に依存する場合である．実際このようなことの起こりうる根拠として，κ 自身の値について考えてみるに，それはエーテルの一般的な規則性から決定されるものではない．また物体の構成要素である電子の重力半径 m についても，これも電子自身の性質だけから決定されるものではない．むしろ両者は，例えばこの世界の中に存在する電子の総数という偶然的なものに依存することもありうるであろう．電子に関する独特な数値的関係は上述のような考えを暗示する．しかし，それはさしあたり，何らの根拠もないから，いまのところひとつの想像にすぎない．

§ 40　電磁場の幾何学的表現[26)]

本章のはじめにおいて，アインシュタインの考えにした

の一致は自明である．これに対して λ-項が存在するときは，物質の存在しない宇宙で，$\overset{0}{g}_{ik}$ の一般化に相当する解はド・ジッター宇宙の計量であるといえる．したがって物質の存在しないときは，両者の一致は説明されたといえよう．もし物質の存在が，この一様な計量場を大きく攪乱することがないならば，両羅針儀の一致はそれほどそこなわれないであろう．

26)　訳者注：原著では Das elektromagnetische Feld als Bestandteil des metrischen. となっているが，訳しにくいから，上記のようにした（直訳すれば「計量の一部としての電磁場」）．

がって物さしと時計を用いて，真空中における長さ（および時間）を定義したときは，われわれの経験に暫定的に結びつく量としてそれを定義した（またそのようなときにのみ物理的定義が可能である）．これはちょうど，電場の強さを単位電荷に作用する力として定義するのと同じである．ところでわれわれの論理の輪は閉じた，首尾一貫したものでなければならない；すなわち，一度ある物理的な作用の法則が確立されたならば，電磁場の影響下にある荷電物体や，また計量場の影響のもとにある物さしが上述の物理法則の結果として，もともとこれらの場の強さを定義するために利用した特別なふるまいを，たしかに再現することをわれわれは証明しなければならない．しかし現在は，われわれの物理学の体系を完結させるには量子論的要請を加える必要があることは確かである．ボーアの原子論 [39] によれば，電子が原子内で描く円軌道の半径，および原子から放射される光の振動数は，原子の構造を考慮するとき，プランクの作用量子，電子および原子核の電荷と質量から決定される．原子の半径と同じように，結晶質の媒質の格子間距離についても，したがってまた与えられた剛体状の物さしの長さについても上と同様なことがなりたつ．原子物理学における最も新しい発展といえば，それはすべての物質の窮極的な構成要素が電子と陽子であるということを確立したことであろう．またすべての電子はいずれも等しい電荷と質量をもち，陽子もまた同様の性質をもつことが確かめられた．この事実から，**原子の質量，時計の周期，**

物さしの長さが一定な値をもちつづけることが，ある種の惰性にもとづくものではないことが明白となった．むしろ対象物の構造によってきまる一種の平衡状態が上述の不変性の根拠であることがわかった．すなわち対象物は常に，各瞬間に，この平衡状態に適応している．つぎの基本的事実はこのことをよく説明している．その事実とは，われわれが計量場を定義する際に，その出発点として用いた事実である（この事実を，原子内の電子軌道の半径について説明するかわりに，むしろ原子の質量に関連して，説明することにしたい．なぜなら後者の方が物理的にみて，より根本的な量であるから）．計量場の中の同じ場所Ｐに並んで置かれた１個の水素原子と１個の酸素原子の質量の比は 1.008 : 16.000 である．いまこれらの原子が別々に長い時間，世界の中を動きまわった後に，スタートの世界点Ｐから時間的にずっと離れた世界点 P′ において再びめぐりあったとする．われわれはこれらの原子の，P′ における質量比がＰにおける質量比と完全に一致することを知っている．しかしこの質量比は，点Ｐにおいて上記の値にきめられたから，P′ でも同じ値が出現したのではなく，それはむしろ，水素ならびに酸素原子の構造によって強制された値である．世界点が変わっても質量比が変わらないことはつぎの事情にもとづくと考えるべきであろう．すなわち，それぞれの原子の質量は，個々に，その原子が置かれている場所における“ある種の場の量”のもつ値に対して，それぞれきまった比の値をとるように構造的にできあがってい

るということである．ここで“ある種の場”は長さ（＝質量）のディメンションをもつ量であらわされる．

この未知の場の量は，アインシュタインの最近の宇宙論的な考えにおいては，計量場から作られる曲率半径に相当する．アインシュタインの一般的な場の方程式

$$\boldsymbol{R}^i_k - \frac{1}{2}\delta^i_k \boldsymbol{R} - \lambda\delta^i_k\sqrt{g} = \kappa \boldsymbol{S}^i_k, \qquad \boldsymbol{S}^i_k = \frac{1}{2}\boldsymbol{S}\delta^i_k - F_{kr}\boldsymbol{F}^{ir}$$

からは，縮約によって

$$\boxed{R = -4\lambda = \mathrm{const.}}$$

が導かれる．

この考えにしたがえば，物理学の基礎である世界幾何学はリーマン幾何学であるという必然性は，影のうすいものとなる．一般の無限小計量幾何学においても，スカラー曲率 F が存在する．ここに新しく登場した上述の測定に関する基本的経験的事実に違反しないようにするためには，測定に用いられる物体がこの“場の量”に適応している（すなわちその物体の長さが場の量の大きさに比例して伸びちぢみする）ものと仮定するだけで十分である．実際，そのように仮定してはじめて，すべての概念が秩序ある姿に整頓されるように，物事を表現することが可能となる．もしエーテルの本来の構造が計量的性格のものであるべきだとするならば，外力が働いていないときの物体の運動にあらわれる，その運動方向（あるいは世界方向）を保持しようとする傾向（つまり，アフィン接続係数のこと）は，一般に

ベクトルの大きさを維持しようとする傾向から導き出されるべきである．もし孤立した1個の質点に時計を結びつければ，この時計によって，われわれは方向の平行移動を読みとることはできるが，長さの変化については，わからない．なんとなれば，移動による長さの変化は時計を与えたことによってゴマかされてしまったからである．すなわち各点における時計の固有時間の大きさが，その点の世界曲率へ調整（適合）されることによって，長さの変化がかくされてしまうからである．その結果，元来の“エーテル幾何学”と，測定器によって読みとられた，いわゆる“自然幾何学”の間にはひとつの差違が存在することになる〔訳者注：もともとのエーテル幾何学では，たとえば平行移動によって，世界曲率と同じようにベクトルの長さが変わるものとする．しかし測定器自身もそれのおかれた場所における世界曲率半径の変化に比例して伸びちぢみするために，測定されたベクトルの長さの値には見かけ上，変化がない．したがってエーテル幾何学による結論と，測定結果をもとにした“自然幾何学”の主張のあいだにはくいちがいが起こる〕．ベクトルの長さの無限小合同移動を，“曲率の大きさの変化に長さの変化を適合（比例）させる”という操作でおきかえることによって，前者，つまり“エーテル幾何学”から“自然幾何学”が導かれる．

以上の議論をわれわれはひとつの最終的な総括的結論にまでまとめることができる［40］．世界のなかのある場所における世界の物理的状態を，数で表現するためには，その

点の近傍において座標系を導入するばかりでなく，さらにある長さの単位を規定しなければならない．前節までに述べてきたアインシュタインの理論が第1の点（つまり座標系の設定に対する任意性）について，採用した原理的な立場とおなじような立場を，第2の点（つまり長さの単位についての任意性）に関しても，採用することが重要な点である．この考えかたを幾何学や，長さの概念に適用することによって，第II章において，まずユークリッド幾何学からリーマン幾何学への前進が行なわれ，さらに，完全な無限小幾何学への最終的な発展が実現された．運動の相対性原理によってユークリッド幾何学からリーマン幾何学への前進が引きおこされたように，**大きさの相対性原理**によってさらにもう一歩，前へ進むことが必然的に引きおこされる．そこで計量場を規定するために**基本二次形式** $g_{ik}dx^i dx^k$ のほかに，さらに**微分一次形式** $\varphi_i dx^i$ が登場する．また任意の4個の，座標の関数を伴う一般座標変換に対する不変性のほかに，場の法則は第5番目の任意関数に依存する測度変換に対する不変性，つまり“**測度不変**”（またはゲージ不変）の要請を満足しなければならないことになる；すなわち場の法則は，φ_i および g_{ik} を，それぞれ

$$\varphi_i - \frac{1}{\tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^i}, \qquad \tau g_{ik}$$

でおきかえても，不変でなければならない．ここで τ は座標の任意の正の関数である．われわれは以前，一般座標変換に対する不変性がエネルギーおよび運動量の微分形式に

書かれた保存則とどのような関係で結ばれているかについて学んだ．そこで測度不変性が同じような関係で第5番目の保存則，すなわち電荷の保存則と結ばれていると予想してよかろう．

ここに述べた新しい立場から，既に知っている事実に到達するために，まず作用量 W として“自然な尺度で測定された”体積を採用する．この“自然な尺度で測定された”体積とは本書上巻279ページ（§18（58）参照）で，すでに説明したものである．いま計量場のスカラー曲率 F が負であると仮定して $F=-4\lambda$ とおけば，作用量は

$$W=\int\lambda^2\sqrt{g}dx, \tag{79}$$

$$\delta W=\int\{2\lambda\delta(\lambda\sqrt{g})-\lambda^2\delta\sqrt{g}\}dx$$

となる．ここで $\lambda=\text{const.}$ となるように場を規格化する．しかしこのことは場の変分に制限を加えることにはならない．そこで上の変分式を $-\lambda$ で割ると，被積分関数は

$$\lambda\delta\sqrt{g}-\delta(2\lambda\sqrt{g}).$$

$\lambda=-\dfrac{1}{4}F$ に§18の（64）を代入すると，

$$-2\lambda\sqrt{g}=\frac{1}{2}\sqrt{g}\cdot R-\frac{3}{2}\frac{\partial(\sqrt{g}\varphi^i)}{\partial x^i}-\frac{3}{4}(\varphi_i\varphi^i)\sqrt{g}.$$

$\partial(\delta \boldsymbol{v}^i)/\partial x^i$ の形をもつ項は積分すれば0となるから，これを無視すれば，変分原理により

$$\delta\int\boldsymbol{V}dx=0$$

となる．ここで

$$V=\boldsymbol{G}+\lambda\sqrt{g}-\frac{3}{4}(\varphi_i\varphi^i)\sqrt{g}.$$

この $\boldsymbol{V}$ にでてきた λ はもはや一定数で，変分をとらない．ところで φ_i の変分を考えると，方程式

$$\varphi_i=0 \tag{80}$$

が導かれる．g_{ik} の変分結果に（80）を用いると，宇宙項をもつ重力場の方程式が求められる．それは

$$\delta\int(\boldsymbol{G}+\lambda\sqrt{g})dx=0$$

の与えるものと一致する．この方程式から再び

$$R=-4\lambda=\text{const.}$$

が導かれることは，今の場合には，なんら驚くべきことではなく，むしろ当然である．ゲージ不変（測度不変）な理論では，この関係式と方程式（80）を一緒にして，

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x^i}-\lambda\varphi_i=0 \tag{81}$$

のように書くことができる．（81）からつぎのことがわかる：合同移動によって“大きさ”を運搬する場合に，その変化の様子は，作用原理の結果として，導かれた曲率半径の変化の規則（81）と同じようになるということである．以上のようにしてわれわれは既に知っている法則を導いたことになる[27]．しかし同じ結果を導いたとはいうものの，

27）訳者注：この結果はまさに本書下巻 186 ページに述べた，議論の出発点となった仮定の再現にほかならない．すなわち，すべ

われわれが用いた方法は，そこにでてきた概念の真の関係をよりよく表現するものであり，またひとつの簡単な統一された作用原理（79）から上述の結果を導いたという点で，意義があるものといえる．さらにわれわれの方法によれば，場の方程式に宇宙項を付け加えることが必要不可欠であることが示された．この項はアインシュタインの理論では，理論自身からその必要性がでてきたのではなく，むしろ，ただ恣意的に仮定されたものである．

自然界には重力場のほかに電磁場も存在する．その4元ポテンシャルの共変成分と無限小変位ベクトル dx^i のスカラー積はひとつの不変量である．ところで最も一般的な無限小幾何学では，dx^i についての計量基本二次形式のほかに，さらに $\varphi_i dx^i$ のタイプの一次形式を与えることによってその幾何学が規定される．したがって φ_i を電磁場のポテンシャルの成分とみなすことは，きわめて手近な，また，もっともらしい仮定といえよう．これをみとめれば，“大きさ”に対する曲率

$$f_{ik} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial x^k}$$

は電磁場の強さを示すことになる．計量についての基本一次形式は，電磁ポテンシャルと同様に，そもそも任意の関数の全微分をこれに加えてもかまわないという不定性をも

てのベクトルの大きさの合同移動による変化は，曲率半径の変化の規則（81）と同一の規則にしたがうという仮定が，もはや仮定ではなく，作用原理の結果として導かれたことになる．

っている．マックスウェルの方程式の第 1 組：

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial f_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial f_{li}}{\partial x^k}=0 \tag{82}$$

は，もし上述のわれわれの仮定が電磁場の本質に適合しているならば，現実の世界における物理的状態量の経過を規定する自然法則がどのようなものであろうとも，それには無関係に，(82) は電磁場の存在様式をあたえる法則といえる〔任意の φ_i に対し (82) が恒等的に成立するという意味：訳者〕．マックスウェル方程式の第 2 組はマックスウェルの作用量から導かれる．すなわち

$$\int l dx=\frac{1}{4}\int f_{ik}f^{ik}dx \tag{83}$$

から導かれる．これは 4 次元多様体のなかで，計量場だけから作られる積分不変量のなかで最も簡単な構造をもつもので，しかも現実に存在しうる量である．次元数が 4 でない他の多様体においてはこれに似た量は存在しえない．すなわち，一般の計量幾何学においてはまったく一般的に，あるきまった法則にしたがって計量場から，ひとつの量を作ることができる．その量は次元数 4 に対してはスカラー密度の性質をもつが，その他の次元数の場合には，測度不変性に結びついた要請，つまり“測度の重み”＝0 でなければならないという要請のために，スカラー密度ではありえないことになる．このことから，現実の世界の次元数が 4 であるという特殊性に対する真の理由が，この理論によってはじめて明らかにされたといえよう [41].

われわれの仮説が正しいならば，われわれはいまや，内的になんの関係もない二つの場を扱うのではなく，ひとつの対象，すなわちエーテルをこれから問題にすることになる．ここでエーテルとは，**種々の異なる個々の物質を，互いに作用しあうひとつの体系に結びつけているもので，それは計量構造をもつ 3+1 次元的にひろがった媒体である．**“物理的状態”（すなわち重力以外の現象，特にここでは電磁場の状態）と，§30 で確立された“重力場”の間の対立はここに述べた新しい見解によって解消され，また完全な統一的な，首尾一貫した観点からこれら両者の統一的扱いが導かれた．純粋に幾何学的な物理学を創るというデカルトの夢は，もちろん彼自身によっても予想だにしなかった，素晴らしい方法で，ここに現実のものとなったといえよう．少なくとも場という連続的な媒体を扱う物理学の部門に関して，上のようにいってもさしつかえなかろう．この新しい物理学では，強度量（Intensitätsgrössen）は，密度量（Quantitätsgrössen）とは完全に別種の量として扱われる（測度の重みに着目すれば，両者の差違は明白である）．――唯一の一様な 4 次元計量空間は 5 次元ユークリッド空間内にある円錐面で与えられることが証明できる（§13 参照）．それは物質から遠くはなれた場所におけるエーテルの静止状態を示す．その世界は，方程式 $\varphi_i=0$ およびド・ジッターの ds^2 で表わされる．

エーテル中における（つまり真空中における）マックスウェルの法則のゲージ不変性（測度不変性）については既

に特殊相対性理論のワクの中で述べた [42]．いま座標系および測度の定義を

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\}$$

がなりたつように選ぶことができるときは，われわれは特殊相対性理論にたちもどることになる．ところで x^i，$\bar{x}^i$ を二つの座標系とし，このいずれに対しても ds^2 に対して上のような標準形がなりたつとすれば，x^i から $\bar{x}^i$ への変換はひとつの共形変換（konforme Transformation）である．すなわち

$$(dx^0)^2 - \{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\}$$
$$= K[(d\bar{x}^0)^2 - \{(d\bar{x}^1)^2 + (d\bar{x}^2)^2 + (d\bar{x}^3)^2\}]$$

がなりたつ．ここで K はある比例因子で，1 である必要はない．4 次元ミンコウスキー世界における共形変換は，4 次元世界の中にある任意の“球”を，同じ世界の中の“球”に写像する“球 - 球写像 ”（Kugelverwandtschaft）[43] と同じものである．4 次元世界の球は，6 個の同次球座標 $u_0, \cdots, u_5$ の間の一次同次式で表わされる．この u はつぎの式で定義される：

$$u_0 : u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5$$
$$= x^0 : x^1 : x^2 : x^3 : \frac{(x \cdot x) + 1}{2} : \frac{(x \cdot x) - 1}{2}.$$

ここで $(x \cdot x)$ とは

$$(x \cdot x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

を表わす．このように定義された $u_0, \cdots, u_5$ は

$$(u_0)^2-(u_1)^2-(u_2)^2-(u_3)^2-(u_4)^2+(u_5)^2=0$$

という関係を満足する．球－球写像は，u_i に対するすぐ上に述べた条件式を不変に保つ，u_i の一次同次変換として表わされる．真空中のマックスウェルの方程式は，特殊相対性理論においてもそのままの形でなりたつから，それは 10 個のパラメーターに依存する一次ローレンツ変換群に対して不変である．しかしそればかりでなくローレンツ群を包括する 15 個のパラメーターに依存する球－球写像群に対しても，それは不変である．

ここで作用量 W として，前に出た“自然な尺度で測定された”体積とマックスウェルの積分不変量（83）の一次結合：

$$W=\int\{\lambda^2\sqrt{g}-\alpha l\}dx \qquad (\alpha：\text{未定の定数係数})$$

を採用するならば，われわれの新しい観点から，既に知っている電磁場に関する諸法則との関連が導かれる．ここで $\lambda=$ 一定 $=1/4$ という規格を用いれば，作用積分の被積分関数は

$$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{G}-\alpha \boldsymbol{l})+\frac{1}{4}\sqrt{g}\{1-3(\varphi_i\varphi^i)\}$$

となる［44］．ここに用いた規格は，われわれがすべての量を宇宙的な巨大な物さしで測ることを意味する．ここで座標系 x^i を，つぎのようにえらぶ．すなわち二つの世界点の座標が，大体，1 の大きさの程度だけ異なるとき，両点の間の距離がおよそ宇宙的なスケールのへだたりとなるよう

に x^i をえらぶ．このような座標系では g_{ik} や φ_i の値は大体，1 の程度と仮定してよい．これに対して $x^i=2\varepsilon x^{i\prime}$ という変数の変換を行なえば（ε は非常に小さい数，したがって，$x\approx 1$ の程度の点は x' 系では，非常に大きな座標値の点となる），われわれが普通用いる程度の大きさ（つまり人間の体の程度の大きさ）に適した座標系 $x^{i\prime}$ が導かれる．この座標変換と同時に，ds^2 に $1/4\varepsilon^2$ をかけるという測度変換を行なえば，g_{ik} はもとのままになる．したがって新しい座標系では

$$g'_{ik}=g_{ik},\quad \varphi'_i=2\varepsilon\varphi_i,\quad \lambda'=4\varepsilon^2\lambda=\varepsilon^2$$

となる．したがって，日常的なスケールの物さしで測った場合の世界の曲率半径が $1/\varepsilon$ ということになる．ここで g_{ik}，φ_i はもとのままの量を意味し，また $x^{i\prime}$ を，$'$ をはぶいて，そのまま x^i とかくことにすれば，$\boldsymbol{V}$ は

$$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{G}-\alpha\boldsymbol{l})+\varepsilon^2\sqrt{g}\{1-3(\varphi_i\varphi^i)\} \tag{84}$$

となる．ここでごく小さい ε^2 の程度の項を無視すれば，電磁場と重力場に対する古典的なマックスウェル－アインシュタインの理論がまさに導かれる．また同じ項を省略することによって，電磁場のエネルギー・運動量密度に対する微分型の"保存則"（これを力学的方程式とよぶことにする）も導かれる．この式から電磁場の力学的作用を導くことができる．その結果はもちろん，われわれの知っている実験結果と一致する．最後に，物さしの長さや原子時計の振動数が，自然な測度を基準としたとき（つまり理論に登場する基本的な，長さのディメンションをもつ場の量を単

位として長さを測るとき)，**一定に保たれる**という事実もすべての長さが曲率半径と同じようにふるまう，つまり長さはすべて曲率半径に適合しようとするという性質によって実現される．上述の力学的方程式を導くさいに，ε^2 に比例する宇宙項を省略したことは，それが非常に小さいから許された．しかしそればかりではない．物体の質量は一般にある精度の範囲内で定義される（§38 参照)．またこれと同じぐらいの精度で，物体をとりまく計量場を近似的にユークリッド的とみなすことができる．このような事情を考えるとき，力学的な方程式を扱うさいには，宇宙項はむしろ当然省略すべきものである．この理論では，**自然法則**によって引きおこされる物体の運動や，時計の周期の伝達の法則が，エーテルのアフィン接続により規定されるものではないことは，作用量 W と，アフィン接続の成分

$$\Gamma^r_{ik} = \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} + \varepsilon(\delta^r_i \varphi_k + \delta^r_k \varphi_i - g_{ik}\varphi^r) \qquad (85)$$

を直接，比べてみれば，容易にわかる．たとえば，作用原理から導かれる自然法則はその中にある φ_i を $-\varphi_i$ におきかえても，法則に変化はない．これに反して（85）によれば，このような置きかえによって，エーテルのアフィン接続は変更をうける．

われわれの理論，特に φ_i を電磁ポテンシャルとみなすという，なかなか奇抜な解釈はつぎのような意味において，その正しいことが実証されたといえよう：**測度不変の原理によって必然的に導かれた世界幾何学の拡張は，簡単な合**

理的な方法で，計量場の状態を記述する量だけから作られた作用量を基礎にして，われわれの経験事実に合致する結論を与えた．また従来の理論では，計量場とならべて電磁場の存在を仮定する必要があったが，上述の拡張は，このような仮定を余計なものにした．運動の相対性から一般座標変換に対する不変性についてのアインシュタインの原理が生まれた．上に述べた測度不変の原理はまさに，このアインシュタインの原理とならぶべきものである．このアインシュタインの原理の唯一の物理的証明はつぎのようなことにより与えられる．すなわち外力（たとえば電気力のような重力以外の力）の作用を受けない自由粒子の運動に関して，計量場以外には特別な重力場の助けをかりなくとも，座標変換に対して不変な作用量だけから変分原理によって，惑星のよく知られた運動を導くことができるということである．

それにもかかわらず，なおひとつの不安が残っている．アインシュタインの場合には，ベクトルの平行移動にさいしてその方向を保持する原動力となっている慣性力と，重力の間の関係は，重力的質量と慣性質量の等しいこと，つまり“等価原理”によって直観的に容易に明らかにされる：それでは合同移動と電磁場の間のここに主張されたような関係に対する直観的な証拠はどこにあるか？　そのような直観的な根拠は残念ながら欠けていることを，ここに承認しなければならない．しかしわれわれはなぜ，そのような証拠が欠けているかという疑問に対しては説明ができ

る．(1) もし幾何学的表現を使わないことにすれば，われわれの理論の核心はつぎの点にある：世界の状態がわかっていても，重力ポテンシャル $ds^2=g_{ik}dx^idx^k$ および電磁ポテンシャル $d\varphi=\varphi_i dx^i$ は一通りには決定されない．これらはそれぞれ $\tau\cdot ds^2$ および $d\varphi-d\tau/\tau$（τ は任意の正の関数）でおきかえることができる．しかし場の強さ f_{ik} にはこの任意関数 τ は全然，顔を出さない．したがって荷電物体に対する電磁場からの力学的作用は測度とはまったく関係ないことになる．(2) このような電磁的力が現われるということは，作用積分の中に測度変換によって消去することのできない“大きさの曲率” f_{ik} が含まれているための当然の結果である（このことは“慣性力”と“力”の相違である．前者は座標変換によって局所的に消去できるが，後者は測度変換でも消去できない）．もし仮にアインシュタインの重力理論において，その作用量が g_{ik} の1階微分のみならず，曲率にも本質的に（つまり部分積分等によって消去できない形で含まれること：たとえば $\int R_{ik}\boldsymbol{R}^{ik}dx$）依存するならば，普通の重力のほかに，質量に比例しない力が登場する．この力と慣性場との関係は“等価原理”にそむく．重力がアフィン接続の時空的変化を示すものであるように，計量的接続の時空的変化の可能性を示すものとして導入されたこの電磁場は，決して重力場の類似品ではない．(84) に与えられた作用密度 $\boldsymbol{V}$ においては，重力の作用密度 $\boldsymbol{G}$ の類似項は $\boldsymbol{l}$ ではなくて，むしろ宇宙項の中にある $\varphi_i\varphi^i$ の項である．しかしこの量は ε^2 に比例する．し

たがって実験的にこれをたしかめることはむつかしい．電磁場の作用密度 $\boldsymbol{l}$ は φ の高い階数の微分からできている項である．アフィン接続の場合，この $\boldsymbol{l}$ に対応するもの（アフィン接続の微分からできているもの）は作用量の特別な関数形のために，でてこない．したがってこの世界で慣性場に対抗する唯一の，また本来の“力”として，電磁的力が登場することになる．(3) $\lambda=\mathrm{const.}$ のように規格化すれば，ポテンシャル φ_i——φ_i は，測度の規格化によって，ローレンツ条件 $\partial(\sqrt{g}\cdot\varphi^i)/\partial x^i=0$ を満足するようになる——は各点における“大きさ”を合同移動により定義したときと，曲率半径に適合するように定義された“大きさ”との間のくいちがい，つまりエーテル幾何学と，物さしによる測定値を用いた幾何学とのくいちがいを示す[28]．したがって物体の長さの測定値のふるまいや，その運動については φ^i はなんらの影響をも与えない．

われわれの理論がもたらす唯一の新しい点は，電磁ポテンシャルが働いているとき，アインシュタインの宇宙項

$$\varepsilon^2\sqrt{g} \quad \text{が} \quad \varepsilon^2\sqrt{g}\{1-3(\varphi_i\varphi^i)\}$$

によりおきかえられるということである．この置きかえの意味を明らかにするために，まず場の方程式を具体的に書

28)　訳者注：曲率 λ に適合するように各点における“大きさ”を定義すれば，$\lambda=\mathrm{const.}$ のときは，ひとつのベクトルの“大きさ”はいたるところで一定となる．これに対して，合同移動によって各点における大きさを定義すれば，φ_i が 0 でないかぎり，大きさ l は，dx^i なる移動にともなって $dl=-l\cdot\varphi_i dx^i$ だけ変化する．したがって両種の定義結果には差違が生まれる．

いてみよう．φ_i の変分から電磁場の方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}^{ik}}{\partial x^k}+\frac{3\varepsilon^2}{\alpha}\varphi^i\sqrt{g}=0 \tag{86}$$

となる．また g_{ik} の変分をとると

$$\boldsymbol{R}_i^k-\frac{1}{2}\boldsymbol{R}\cdot\delta_i^k=\alpha(-\boldsymbol{l}\delta_i^k+f_{ir}\boldsymbol{f}^{kr})$$
$$+\varepsilon^2\sqrt{g}\{(1-3\varphi_r\varphi^r)\delta_i^k+6\varphi_i\varphi^k\}. \tag{87}$$

方程式（86）から φ_i は規格化条件

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\cdot\varphi^i)}{\partial x^i}=0 \tag{88}$$

を満足していることがわかる．この式は電磁場の方程式から上のように導かれたが，また（87）からも導くことができる．すなわち（87）を縮約すれば

$$-R-4\varepsilon^2\left\{1-\frac{3}{2}\varphi_i\varphi^i\right\}=0. \tag{89}$$

一方 $F=-4\lambda=-4\varepsilon^2$ という規格のために§18の（64）を用いて［(84）と同じような操作により］

$$-F=-R+6\varepsilon\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\varphi^i)}{\partial x^i}+6\varepsilon^2(\varphi_i\varphi^i)=4\varepsilon^2.$$

これと（89）を一緒にすれば（88）が導かれる．

§37で，電荷をもった球対称の物体が静止しているとき，この物体を中心とし，r を半径とする球面を通って流れでる重力場のベクトル密度 $\boldsymbol{m}^i$（本書下巻132ページ参照）の総量は r に依存することを知った．そこで球面 $r=r_1$ と球面 $r=r_2$（$>r_1$）のそれぞれを通過する総量の差は，両球面

によってはさまれた部分にある電磁エネルギーを $1/\kappa$ 倍したものに等しい．このことは，重力場を作る質量とエネルギー（ただし，ディメンションをそろえるための因子 κ を考えにいれたとき）の同等であることを意味する．ひとつの物体がエネルギーを放出するときは，放出されたエネルギーに同等な質量だけ，物体の質量は減少する．放出されたエネルギーを求めるには，この物体を包む閉曲面 Ω を通して流れでるエネルギーの流れの総量を時間について積分すればよい．これに反して，静止している荷電物体から流出する電気的ベクトル密度（つまり電束密度）$(\boldsymbol{f}^{01}, \boldsymbol{f}^{02}, \boldsymbol{f}^{03})$ の総流出量は，普通の理論では，r に無関係である．このことは，この物体のまわりの電場のなかには電荷が存在しないことを意味する．ところが，本節の理論では，これに小さい補正項が付け加わる．それはもちろん ε^2 の程度の小さな量である．**原理的には，この補正項のために，電荷と質量のあいだに類似性がうまれる．**（86）において，補正項 $(3\varepsilon^2/\alpha)\cdot\varphi^i\sqrt{g}$ は 4 元電流密度に相当する．つまり電荷と（ポテンシャル）$\times 3\varepsilon^2/\alpha$ とは同等であることになる．したがってある荷電物体が“ポテンシャル”を放出すれば，この物体は，放出したポテンシャルの総量に $3\varepsilon^2/\alpha$ をかけた量に等しい電荷を失う．放出されるポテンシャルの量は，3 次元空間的なベクトル・ポテンシャル

$$(\varphi^1\sqrt{g},\ \varphi^2\sqrt{g},\ \varphi^3\sqrt{g})$$

が物体を包む閉曲面 Ω を通して流れでる総量を時間について積分すれば求められる（物体がエネルギーを放出するこ

とによってその質量を失うことと，この物体を構成している電子自身の質量変化とはほとんど結びつきがない．これと同じことは電荷の損失についてもなりたつ)．

ポテンシャルの一次形式 $\varphi_i dx^i$ は“大きさ”の合同移動にとって，それを規定する重要な量であるが，これ自身は長さの単位の選びかたには無関係である．したがってそれは，われわれの理論では，電荷の絶対単位と考えられる．また $\lambda=1$ という規格化をすれば，これにより長さの絶対単位が導入される（これによって電子をひとつのきまった電荷と質量に保つことに対して，それを可能にさせる場があたえられたことになる)．しかしこれらの単位は，宇宙の大きさに匹敵するような大きな量に適したもので，われわれの知らないものである．われわれにとっては，上述の単位で測って 1 の長さのものは，cm 単位では $1/\varepsilon$ に等しいということしかわからない．また上述の絶対単位で測って 1 の電荷は静電単位では e/ε であり，したがって $e^2=\kappa/\alpha$ という関係がなりたつ（α の決定)．ここで**作用量がディメンションをもたない純粋の数である**ということは，意義深いことである．もし $\varepsilon\to 0$ という極限をとれば，長さの絶対単位ばかりでなく，電荷の単位まで失うことになる．また α の数値は小さなものとなる．それゆえ，自然現象に対する α の影響は宇宙項同様にきわめて小さい．ところでわれわれの作用量は二つの項をある任意の数係数 α をかけて和をとったものである．この意味で，それはまことに不満足なものである．そこで——§39 の終わりで述べた考えを

再びここでもとりあげて——α の値は場の合法則性から導かれるものではなく，例えばこの世界に存在する物質の全体，すなわち，電子の総数によって決定されるという仮定をすることにしよう．そこで普遍的な作用原理はつぎのように書きかえられる：**世界の中のある有界な領域の内部で，計量場の仮想的変化を考える．この変化はこの領域外では 0 となるとする．さらにこの変化が，領域の“自然の尺度で測られた体積”を不変にするとき，すなわち条件**

$$\delta \int \lambda^2 \sqrt{g} dx = 0$$

が満足されるとき，これに対してマックスウェルの作用量は不変である．すなわち

$$\delta \int l dx = 0.$$

上の原理にさらにつぎのことを付け加えねばならない：もし仮想変化が，体積を，変化前より大きく（または小さく）させるときは，それはまた同時にマックスウェルの作用量を以前より大きく（または小さく）させる．この付加された要請から α は必然的に正となる．

もしポテンシャルの一次形式が $=\varphi dx^0$，計量基本二次形式が

$$ds^2 = f^2(dx^0)^2 - d\sigma^2$$

となるように，座標系と測度を選ぶことができる場合には，静的場が存在することになる．ここで φ と f は x^0 に無関係で，ただ空間座標 x^1, x^2, x^3 だけの関数，また $d\sigma^2$ は x^1

$\sim x^3$ の正定符号の微分二次形式である．これら両種の基本形式は（ごく特別な場合を除けば），つぎのような座標変換や測度変換に対してその特別な形をかえない．すなわち x^0 は一次変換だけに限る．また空間座標は，それらどうしの間の変換だけを受け，x^0 とはいりまじらない．最後に測度の変換の比は定数にかぎる場合である．したがって静的場の場合には，計量基本形式が $d\sigma^2$ である 3 次元リーマン空間と，その中にある 2 個のスカラー量 f，φ を扱うことになる．すなわち静電ポテンシャル φ と，重力ポテンシャル，あるいは光速度 f である．したがって，静的世界はもともと既に測度が特定なものに選定されている．このような場に対して $\lambda=\mathrm{const.}$ かどうかが問題である．これに対する答は，“イエス” である．なんとなれば，いま静的場に対して $\lambda=1$ となるように測度変換を行ない，変換後のすべての量を上に－をつけて表わせば，〔仮に $\lambda=\mathrm{const.}$ でなかったとして，それが 1 となるように以下の変換を行なう：訳者〕

$$\bar{\varphi}_i=-\frac{\lambda_i}{\lambda},\qquad \text{ここで}\quad \lambda_i=\frac{\partial\lambda}{\partial x^i}\qquad (i=1,2,3)$$

$$\bar{g}_{ik}=\lambda g_{ik},\quad \bar{g}^{ik}=\frac{1}{\lambda}g^{ik},\quad \sqrt{\bar{g}}=\lambda^2\sqrt{g}.$$

そこで（88）は

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\sqrt{g}\lambda^i)}{\partial x^i}=0.$$

したがって $\lambda=\mathrm{const.}$ でなければならない[29]．

場の方程式は静的球対称な解を持ち，しかも“空間の赤道部分”でも，そこに質量の限界を設けなくても，正則となるような解を持つことがわかる．さらに解のふるまいについて注目すべき性質がある．それは例えば $(\varphi)^2$ が r の減少関数であるということである．さらに $\varepsilon\to 0$ とすれば，この解から（50）が導かれる．それは無限空間のなかに1個の，電荷をもった質点が存在する場合の場を示す．アインシュタインの宇宙論の立場からみれば，われわれの場の法則は任意の電荷と，任意の質量をもった物体の存在を許すものであるということになる．しかしド・ジッターの宇宙論の観点にたてば，事情はもちろん，変わってくる．

われわれの理論も電荷の正負のちがいに対して説明を与えることはできない．しかしそのために，われわれの理論を非難すべきではない．なぜなら正負の電荷の違いは，疑いもなくつぎの事実にもとづいているからである．すなわち2種の素粒子，電子と陽子について考えるに，正電荷の

29）上の結論は空間が閉じているときにはじめて正しいものといえる．物質の特異点を考えるとき，この特異点のまわりでは，λ は $a+\dfrac{b}{r}$ という形をもつ．しかし $b=0$ でなければならない．もしそうでなければ，この物質（特異点）を包む閉曲面を通してベクトルポテンシャルの流れ密度 $\lambda^i\sqrt{g}$ が存在し，そのため b に比例する電荷の時間的流失がおこる．しかし電荷は，一方，保存するように調整されている．素粒子の世界におけるこのような要請（各素粒子の電荷が一定にたもたれること）を付け加えることにより，いかなる事情のもとでも $\lambda=a=$ 一定 となる．

粒子のもつ質量と，負電荷に結びついている質量とは異なるということである．この違いは物質自身の性質によることで，場の性質にもとづくものではない．

“純粋の無限小幾何学”（つまりベクトルの方向ばかりでなくその大きさについても，無限に接近した2点における量についてだけ互いの比較ができる幾何学）が，特に§19で述べた群論的な基礎を考えるとき，いかに完全な，また必然的に完結した建造物であるかということがわかるであろう．このことを念頭におけば，以上に述べた理論こそ，場の物理学についてのわれわれの全知識（それは首尾一貫した，また納得のいく宇宙論的要請によって補足されている）の美事な理論的集約であり，またその具体化であると主張してもさしつかえなかろう．

§ 41　不変性と微分形保存則

座標変換に対する不変性と，エネルギー・運動量の微分形式に書かれた保存則の間の関係は，§32においてアインシュタインの重力場の方程式の近似解を求めたさいに，非常に簡単な形で，その姿を現わした．すなわち座標系を任意に選ぶことができるために，重力ポテンシャル ψ_i^k が，エネルギー・運動量テンソルの保存則に似た形の条件式(42) を満足するようにさせることができた．またそこでは，重力ポテンシャルの方程式と，電磁場の方程式の間の類似性についても指摘された．すなわち電磁場のポテンシ

ャルも，ゲージ不変性のために，電流の保存則に似た副条件式 $\partial\varphi^i/\partial x^i=0$ を満足するようにさせることができる．したがって，**座標変換に対する不変性とエネルギー・運動量の保存則の間の関係によく似た関係が，ゲージ不変性と電荷の保存則の間にも存在する．**

これから本節で扱う問題は，純然たる数学的関係であり，それは計量場の任意の不変積分 $\int \boldsymbol{W}\,dx$ に対してなりたつものである．われわれはこれから，既に§30で用いたクラインの方法によって，この問題を一般的な形で展開していくことにする．しかし議論を見とおしのよいものとするために，$\boldsymbol{W}$ は g_{ik} 自身，その1階および2階の微係数までの関数とし，さらに φ_i については，φ_i 自身およびその1階微分だけの関数とする．この最も簡単な例はマックスウェルの作用密度 $\boldsymbol{l}$ である．

I. ある座標系を基準とした場合，計量を表わす量 φ_i, g_{ik} を，無限小量 $\delta\varphi_i, \delta g_{ik}$ だけ増加させたとする．また $\boldsymbol{X}$ はある有界な4次元領域とする．上述の無限小の増加に対応する $\boldsymbol{W}$ の変化を $\delta\boldsymbol{W}$ とすれば，$\delta\boldsymbol{W}$ の領域 $\boldsymbol{X}$ にわたる積分は，部分積分法を用いて二つの部分に分かれる：一つは4次元 Div の積分であり，他は $\delta\varphi_i$ および δg_{ik} の一次結合で表わされる量の積分である．すなわち

$$\int_{\boldsymbol{X}}\delta\boldsymbol{W}\,dx=$$

$$\int_{\boldsymbol{X}}\frac{\partial(\delta\boldsymbol{v}^k)}{\partial x^k}dx+\int_{\boldsymbol{X}}\left(\boldsymbol{w}^i\delta\varphi_i+\frac{1}{2}\boldsymbol{W}^{ik}\delta g_{ik}\right)dx. \quad (90)$$

ただし $\boldsymbol{W}^{ik}=\boldsymbol{W}^{ki}$ である．$\boldsymbol{w}^i$ は反変ベクトル密度の成分を示し，$\boldsymbol{W}_i^k$ は（本来の意味における）混合２階テンソル密度の成分であることは容易にわかる．また $\delta\boldsymbol{v}^k$ は

$$\delta\varphi_\alpha,\quad \delta g_{\alpha\beta}\quad \text{および}\quad \delta g_{\alpha\beta,i}\qquad \left(g_{\alpha\beta,i}=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\right)$$

の一次結合で表わされる量である．これをつぎのように表わそう：

$$\delta\boldsymbol{v}^k=(k\alpha)\delta\varphi_\alpha+(k\alpha\beta)\delta g_{\alpha\beta}+(ki\alpha\beta)\delta g_{\alpha\beta,i}.$$

もし係数 $(ki\alpha\beta)$ が k,i について対称であるという条件をつけるならば，$\delta\boldsymbol{v}^k$ は (90) によってはじめて一意的に決定される．この条件のもとでは，もしさらに $\delta\varphi_i$ が測度の重みが０の共変ベクトルの成分であり，δg_{ik} が重みが１の共変２階テンソルの成分とするならば，$\delta\boldsymbol{v}^k$ は本来の意味における反変ベクトル密度の成分となる（上述の条件のかわりに，他の条件を用いたとしても，それが同じ意味で不変な条件として用いることができるなら，もちろん，何の差しつかえもなく，同様のことがいえる）．

これからまず第一に，$\int\boldsymbol{W}dx$ が，測度不変（ゲージ不変）であるということを具体的に書きあらわそう．すなわち世界の測度に無限小変換をほどこしてもこの作用積分が不変であることからはじめよう．いま変換後の“大きさ”が変換前のそれの $\tau=1+\pi$ 倍だとする．π はこの変換を規定する無限小スカラー場で，それは任意に与えることのできるものである．この変換に対して，基本的な諸量はつぎのような変化をこうむる：

$$\delta g_{ik} = \pi g_{ik}, \qquad \delta \varphi_i = -\frac{\partial \pi}{\partial x^i}. \tag{91}$$

これらを $\delta \boldsymbol{v}^k$ に代入すると，それは π と $\partial\pi/\partial x^\alpha$ の一次結合となる．このような $\delta \boldsymbol{v}^k$ を $\boldsymbol{s}^k(\pi)$ とかくことにすれば

$$\delta \boldsymbol{v}^k = \boldsymbol{s}^k(\pi) = \pi \boldsymbol{s}^k + \frac{\partial \pi}{\partial x^\alpha} \boldsymbol{h}^{k\alpha} \tag{92}$$

の形にあらわされる．この $\boldsymbol{s}^k(\pi)$ はひとつの反変ベクトル密度の成分である．さらに $\partial\pi/\partial x^\alpha$ は，スカラー場 π から作られた共変ベクトルの成分であるから，$\boldsymbol{h}^{k\alpha}$ は反変 2 階テンソル密度（の成分）であり，$\boldsymbol{s}^k$ は反変ベクトル密度の成分であることがわかる．さて作用積分の変分（90）は，これが変換（91）に対して不変であるために，0 とならねばならない：

$$\int_{\boldsymbol{X}} \frac{\partial \boldsymbol{s}^k(\pi)}{\partial x^k} dx + \int_{\boldsymbol{X}} \left(-\boldsymbol{w}^i \frac{\partial \pi}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{W}^i_i \cdot \pi \right) dx = 0.$$

この第 2 積分の（ ）の中の第 1 項を部分積分法によって書きかえれば，上の式はつぎのようにかわる：

$$\int_{\boldsymbol{X}} \frac{\partial}{\partial x^k} \{\boldsymbol{s}^k(\pi) - \pi \boldsymbol{w}^k\} dx + \int_{\boldsymbol{X}} \pi \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{W}^i_i \right) dx = 0. \tag{93}$$

そこで変分法でよく知られた考えかたにしたがって，まずつぎの恒等式がでてくる：

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{W}^i_i = 0. \tag{94}$$

なんとなれば，仮にある点（x^i）で（94）の左辺の量が0でない（例えば正）とする．この時は，点（x^i）を包むごく小さな領域を $\boldsymbol{X}$ とし，この中ではいたるところで（94）の左辺の量が常に正となるように $\boldsymbol{X}$ をえらぶ．また任意のスカラー π としては，この $\boldsymbol{X}$ の中では >0，その外では0となるように選ぶ．（93）の第1の積分は表面積分に書きかえられるから，このような場合にはそれは0となる．しかし第2積分は必ず正となり，右辺と矛盾する．そこで（94）を（93）の第2積分に代入すれば，（93）は

$$\int_{\boldsymbol{X}} \frac{\partial}{\partial x^k}\{\boldsymbol{s}^k(\pi)-\pi\boldsymbol{w}^k\}dx=0.$$

これはあたえられた π に対して，任意の有界な $\boldsymbol{X}$ についてなりたつから，この式から

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\{\boldsymbol{s}^k(\pi)-\pi\boldsymbol{w}^k\}=0 \tag{95}$$

が導かれる．これに（92）を代入し，また任意の点において，π，$\partial\pi/\partial x^i$，$\partial^2\pi/\partial x^i\partial x^k$ はまったく任意にとりうることに着目すると上の式はさらにつぎのような恒等式に分かれる：

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}^k}{\partial x^k}=\frac{\partial \boldsymbol{w}^k}{\partial x^k}, \tag{95$_1$}$$

$$\boldsymbol{s}^i+\frac{\partial \boldsymbol{h}^{\alpha i}}{\partial x^\alpha}=\boldsymbol{w}^i, \tag{95$_2$}$$

$$\boldsymbol{h}^{\alpha\beta}+\boldsymbol{h}^{\beta\alpha}=0. \tag{95$_3$}$$

最後の式から $\boldsymbol{h}^{\alpha\beta}$ は2階線形テンソル密度（2階反対称反

変テンソル密度）であることがわかる．(95_1) は (95_3) を考慮すれば，(95_2) から導かれる．なんとなれば，

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{h}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0$$

が (95_3) のために，恒等的になりたつから．

II. つぎに世界連続体に対して無限小変形を行なったとしよう．この変形により，個々の点は ξ^i だけ移動する（たとえば，座標が x^i の点は，座標が $x^i + \xi^i$ の点に移る）．このような点の移動に対して計量はもとのままとする（つまり測度変換は考えないことにする）．同じ時空点における任意の量の，この変形によりおこった変化を δ，また時空点の移動も一緒に考慮したさいの場の量の変化を δ' で表わすことにする．(20)，(20′)，(91) により

$$\left.\begin{aligned} -\delta\varphi_i &= \varphi_i(x) - \bar{\varphi}_i(x) = \left(\varphi_r \frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^r}\xi^r\right) + \frac{\partial \pi}{\partial x^i} \\ -\delta g_{ik} &= \left(g_{ir}\frac{\partial \xi^r}{\partial x^k} + g_{kr}\frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}\xi^r\right) - \pi g_{ik} \end{aligned}\right\}. \tag{96}$$

ここで π は，上に述べた変形によってベクトルの“大きさ”が変わることにもとづく無限小のスカラー場である[30]．座

---

30) 訳者注：点 (x^i) が $\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x)$ に変位した場合，計量基本形式は一般につぎのように変わるものとする［つまり $\bar{\varphi}_i$，$\bar{g}_{ik}$ の定義］：

$$\varphi_i(x)dx^i \to \bar{\varphi}_i(\bar{x})d\bar{x}^i = \varphi_i(x)dx^i - \frac{\partial \pi}{\partial x^i}dx^i,$$

$$g_{ik}(x)dx^i dx^k \to \bar{g}_{ik}(\bar{x})d\bar{x}^i d\bar{x}^k = (1+\pi)g_{ik}(x)dx^i dx^k.$$

標変換および測度の変換に対する作用量の不変性は上記の変形に関連したつぎの公式で表わされる:

$$\delta' \int_{\mathbf{X}} \boldsymbol{W} dx = \int_{\mathbf{X}} \left\{ \frac{\partial(\boldsymbol{W}\xi^k)}{\partial x^k} + \delta \boldsymbol{W} \right\} dx = 0. \quad (97)$$

もし座標変換に対する不変性だけを数式で表わしたいならば，(96) の π を $=0$ とおけばよい．しかしそのようにして (96) から導かれた変分の形は不変性をもたない．なんとなれば $\pi=0$ とおくことは変位 ξ^i に対して線素 dx^i の長さの測定値 l が不変となるように二つの計量基本形式が変換されることを意味する．すなわち $\bar{l}(\bar{x})-l(x)=\delta' l=0$ を意味する．しかしこれは“大きさ”を合同移動させたとき，その変化の規則を正しく表現するものではない〔これは特別な測度を用いたとき，ある世界点においてのみ，なりたつ式である：訳者〕．一般に“大きさ”の変化は

$$\delta' l = -l(\varphi_i \delta' x^i) = -l(\varphi_i \xi^i)$$

で表わされる．したがって (96) の π は $\pi=0$ ではなく，$\pi=-(\varphi_i\xi^i)$ とおかなければならない．これを (96) に代入すると

これらから $\delta\varphi_i=\bar{\varphi}_i(x)-\varphi_i(x)$，$\delta g_{ik}(x)=\bar{g}_{ik}(x)-g_{ik}(x)$ を求めれば (96) となる．$\{1+\pi(x)\}$ は移動にともなう長さの変化の割合を示す．もし長さが不変と仮定すれば $\pi=0$ とおけばよい．一般に π は ξ^i に比例した小さなスカラー場である．

$$\left.\begin{aligned} \delta\varphi_i &= f_{ir}\xi^r, \\ -\delta g_{ik} &= \left(g_{ir}\frac{\partial\xi^r}{\partial x^k}+g_{kr}\frac{\partial\xi^r}{\partial x^i}\right)+\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}+g_{ik}\varphi_r\right)\xi^r \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

となって，測度不変な形をしていることがわかる．上の結果を見れば，**時空の変形によって，任意の線素 dx^i が合同移動をこうむるように，両種の計量基本形式は変化することがわかる**〔訳者注：本書下巻 212 ページの訳者注における π を $=-\varphi_r\xi^r$ とおいた関係式が，計量基本形式の変換規則を示すものである．特に $g_{ik}(x)dx^i dx^k = l(x)$ とおけば，基本二次形式の変換規則はつぎのようになる：$\delta' l = l(\bar{x}) - l(x) = \pi l = -l\cdot\varphi_r\xi^r$．これは l の合同移動に他ならない〕．さらに（98）の不変性もつぎのようにすればよくわかる：いま（98）の第 2 式に特に注目しよう．いま混合テンソル[31)]

$$\xi^i_k = \frac{\partial\xi^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kr}\xi^r$$

を導入すれば，上の第 2 式は

$$-\delta g_{ik} = \xi_{ik} + \xi_{ki}$$

となる〔訳者注：Γ は測度変換に対して不変，したがって ξ^i_k も不変，また $\xi_{ik} = g_{ir}\xi^i_k$ は g_{ir} と同じ測度変換性をもつ〕．すでに I. において測度不変性にもとづく結論を引きだしたから，（96）の π について，上に述べた $=-\varphi_r\xi^r$ の

---

31)　Γ^i_{kr} の定義は§17（55）を見よ．

場合だけに限って議論をすすめてかまわない．π に対するこの選びかたは，測度不変性の観点からみれば，唯一の可能な選びかたである〔つまり任意の関数だけこれに加えることができる点を別とすれば，唯一の選びかたである：訳者〕．

さて変分（98）に対して，ひとつの反変ベクトル密度 $\boldsymbol{S}^k(\xi)$ をつぎのように定義する：

$$\boldsymbol{S}^k(\xi) = \boldsymbol{W}\xi^k + \delta\boldsymbol{v}^k.$$

この $\boldsymbol{S}^k(\xi)$ は，任意関数 ξ^k，その 1 階，ならびに 2 階の微係数の一次結合であらわされる．すなわち具体的にかくと

$$\boldsymbol{S}^k(\xi) = \boldsymbol{S}_i^k \cdot \xi^i + \bar{\boldsymbol{H}}_i^{k\alpha} \cdot \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2}\boldsymbol{H}_i^{k\alpha\beta} \cdot \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$$

の形をしている量である［右辺の第 3 項の係数 $\boldsymbol{H}_i^{k\alpha\beta}$ は（α，β）について対称である］．$\boldsymbol{S}^k(\xi)$ がベクトル ξ^i に依存するベクトル密度であるという事実から，$\boldsymbol{S}^k(\xi)$ の上の表現にでてきた各係数の変換性が最も簡単にまた完全に導かれる．特に $\boldsymbol{S}_i^k$ は 2 階混合テンソル密度のような形をしているが，そうではない．そこで，われわれはこれを“擬テンソル密度”と呼ぶことにする．（97）に（90）と（98）を代入すると（97）の被積分関数は

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\boldsymbol{S}^k(\xi) - \xi^i\left\{f_{ik}\boldsymbol{w}^k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} + g_{\alpha\beta}\varphi_i\right)\boldsymbol{W}^{\alpha\beta}\right\}$$
$$-\boldsymbol{W}_i^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}.$$

ところで

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}+g_{\alpha\beta}\varphi_i=\Gamma_{\alpha,\beta i}+\Gamma_{\beta,\alpha i}$$

のように書きかえることができる．さらに $\boldsymbol{W}^{\alpha\beta}$ の $\alpha\beta$ についての対称性のために上の $\{\quad\}$ の中の第2項は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}+g_{\alpha\beta}\varphi_i\right)\boldsymbol{W}^{\alpha\beta}=\Gamma_{\alpha,\beta i}\boldsymbol{W}^{\alpha\beta}=\Gamma^{\alpha}_{\beta i}\boldsymbol{W}^{\beta}_{\alpha}.$$

最後に，$-\boldsymbol{W}^k_i\partial\xi^i/\partial x^k$ に部分積分を用いると，(97) は結局つぎのようになる：

$$\int_{\boldsymbol{X}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\boldsymbol{S}^k(\xi)-\boldsymbol{W}^k_i\cdot\xi^i\right\}dx+\int_{\boldsymbol{X}}[\cdots]_i\cdot\xi^i dx=0.$$

そこで恒等式 (94)，(95) を導いたのと同じ推論にしたがって，つぎの恒等式が導かれる．

$$[\cdots]_i=0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{\partial \boldsymbol{W}^k_i}{\partial x^k}-\Gamma^{\alpha}_{\beta i}\cdot\boldsymbol{W}^{\beta}_{\alpha}\right)-f_{ik}\boldsymbol{w}^k=0, \tag{99}$$

および

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\boldsymbol{S}^k(\xi)-\boldsymbol{W}^k_i\cdot\xi^i\right\}=0. \tag{100}$$

(100) はさらにつぎの諸恒等式に分かれる：

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}^k_i}{\partial x^k}=\frac{\partial \boldsymbol{W}^k_i}{\partial x^k} \tag{100$_1$}$$

$$\boldsymbol{S}^k_i+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\overline{\boldsymbol{H}}^{\alpha k}_i=\boldsymbol{W}^k_i \tag{100$_2$}$$

$$\overline{\boldsymbol{H}}^{\alpha\beta}_i+\overline{\boldsymbol{H}}^{\beta\alpha}_i+\frac{\partial \boldsymbol{H}^{r\alpha\beta}_i}{\partial x^r}=0 \tag{100$_3$}$$

$$\overline{\boldsymbol{H}}_i^{\alpha\beta r}+\overline{\boldsymbol{H}}_i^{\beta r\alpha}+\boldsymbol{H}_i^{r\alpha\beta}=0. \qquad (100_4)$$

いま（100_4）を用いて（100_3）の第3項を

$$-\frac{\partial}{\partial x^r}(\boldsymbol{H}_i^{\alpha\beta r}+\boldsymbol{H}_i^{\beta\alpha r})$$

のようにかけば，（100_3）は

$$\boldsymbol{H}_i^{\alpha\beta}=-\boldsymbol{H}_i^{\beta\alpha}$$

となる．ここで $\boldsymbol{H}_i^{\alpha\beta}$ は

$$\boldsymbol{H}_i^{\alpha\beta}=\overline{\boldsymbol{H}}_i^{\alpha\beta}-\frac{\partial}{\partial x^r}(\boldsymbol{H}_i^{\alpha\beta r}).$$

によって定義される．そこで $\overline{\boldsymbol{H}}_i^{\alpha\beta}$ を $\boldsymbol{H}_i^{\alpha\beta}$ を使って書きあらわせば，（100_3），（100_4）は $\boldsymbol{H}_i^{\alpha\beta}, \boldsymbol{H}_i^{\alpha\beta r}$ の添字の対称性を示す式に他ならないことがわかる．これに対して（100_2）は

$$\boldsymbol{S}_i^k+\frac{\partial \boldsymbol{H}_i^{\alpha k}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_i^{\alpha\beta k}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}=\boldsymbol{W}_i^k. \qquad (101)$$

これに $\dfrac{\partial}{\partial x^k}$ をほどこせば，（100_1）が導かれることが容易にわかる．なぜなら

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_i^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}=0, \qquad \frac{\partial^3 \boldsymbol{H}_i^{\alpha\beta r}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^r}=0$$

であるから．

例　マックスウェルの作用密度に対しては，

$$\boldsymbol{W}=-\boldsymbol{l}=\frac{-1}{4}\sqrt{g}f_{ik}f_{mn}g^{im}g^{kn}.$$

そこで

$$\delta \boldsymbol{v}^k=\boldsymbol{f}^{ik}\delta\varphi_i.$$

したがって（92）により

$$\boldsymbol{s}^i=0,\quad \boldsymbol{h}^{ik}=\boldsymbol{f}^{ik}\text{；それゆえ}\quad \boldsymbol{h}^{ik}+\boldsymbol{h}^{ki}=0.$$

上の最後の式は（95_3）にほかならない．また

$$\boldsymbol{S}^k(\xi)=\boldsymbol{W}\xi^k+\delta\boldsymbol{v}^k$$

から

$$\boldsymbol{S}_i^k=-\boldsymbol{l}\delta_i^k+f_{i\alpha}\boldsymbol{f}^{k\alpha},\qquad \overline{\boldsymbol{H}}_i^{\alpha\beta}=0,\qquad {}^{\cdot}\boldsymbol{H}_i^{\alpha\beta r}=0.$$

さらに（90）から

$$\boldsymbol{w}^i=\frac{\partial\boldsymbol{f}^{\alpha i}}{\partial x^\alpha},\qquad \boldsymbol{W}_i^k=\boldsymbol{S}_i^k.$$

この第二の関係式は既に§30の（11）にでてきた．また第一の式からは

$$\frac{\partial\boldsymbol{w}^i}{\partial x^i}=0,\qquad \frac{\partial\boldsymbol{h}^{\alpha i}}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial\boldsymbol{f}^{\alpha i}}{\partial x^\alpha}=\boldsymbol{w}^i.$$

$\boldsymbol{s}^i=0$ を考慮すれば，これらはまさに（95_1），（95_2）に他ならない．また

$$\boldsymbol{W}_i^i=0.$$

これと $\partial\boldsymbol{w}^i/\partial x^i=0$ を一緒にすれば，（94）が成立していることがわかる．最後に（99）はこの例では

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{S}_i^k}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\boldsymbol{S}^{\alpha\beta}\right)+f_{i\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{f}^{\beta\alpha}}{\partial x^\beta}=0.$$

この式に相当するものは既に§21で計算によって導いた［§21（18）参照］．そこではこの式はマックスウェルのエネルギー・運動量テンソルと電磁場による力学的力の間の関係を示すものであった．

場の法則と保存則　変分式（90）にでてきた δ として，

ある有界な領域の外では 0 となる変分を考える．また $\boldsymbol{X}$ は全世界としてもよいし，あるいは上述の $\delta \neq 0$ である有界な領域としてもよい．その場合には

$$\int \delta \boldsymbol{W} dx = \int \left(\boldsymbol{w}^i \delta \varphi_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{W}^{ik} \delta g_{ik} \right) dx.$$

いま $\int \boldsymbol{W} dx$ を作用量とすれば，ハミルトンの原理から

$$\boldsymbol{w}^i = 0, \qquad \boldsymbol{W}_i^k = 0$$

が導かれる．この第一の式は電磁場の方程式を表わし，第二は重力場の法則を表わす．これら両種の方程式の左辺の間には 5 個の恒等式（94）および（99）がなりたつ．したがって上にならべた 14 個の場の方程式のなかで 5 個は余分なものである．このことは基準系を設けるさいに，5 個の任意関数を含む変換によって，種々の基準系にとりかえることができるという事情に対応する．

上に求めた電磁場の方程式は，恒等式（95_2）を使えば，その形がマックスウェルの理論による方程式と同じ形になる：

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}^{ik}}{\partial x^k} = \boldsymbol{s}^i.$$

特に $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{l}$ のときは $\boldsymbol{h}^{ik} = \boldsymbol{f}^{ki}$，$\boldsymbol{s}^i = 0$ となる．$\boldsymbol{s}^i$ が場の流れのベクトル密度であるように，$\boldsymbol{S}_i^k$ は場のエネルギー・運動量の擬テンソル密度を表わすものと解釈すべきである．$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{l}$ という簡単な場合には，これはマックスウェルのエネルギー・運動量テンソル密度（このときは $\overline{\boldsymbol{H}}_i^{\alpha\beta}$，$\boldsymbol{H}_i^{\alpha\beta r}$ がともに 0 となるので，S_i^k は本来の意味におけるテ

ンソル密度となる）と一致する．一般には（95_1），および（100_1）から，これらの量に対する保存則は

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}^i}{\partial x^i}=0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{S}_i^k}{\partial x^k}=0$$

となる．これらの保存則は二つの異なる方法で場の法則から導かれる．すなわち第 1 の保存則は

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}^i}{\partial x^i}\equiv\frac{\partial \boldsymbol{w}^i}{\partial x^i} \qquad (95_1)$$

に $\boldsymbol{w}^i=0$ を代入しても出てくるが，また（94）と（95_1）を一緒にした恒等式

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}^i}{\partial x^i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{W}_i^i\equiv 0$$

に重力場の方程式 $\boldsymbol{W}_i^k=0$ を代入しても導かれる．また

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}_i^k}{\partial x^k}\equiv\frac{\partial \boldsymbol{W}_i^k}{\partial x^k} \qquad (100_1)$$

に $\boldsymbol{W}_i^k=0$ を代入することにより第 2 の保存則が導かれるばかりでなく，（100_1）と（99）を一緒にした恒等式

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}_i^k}{\partial x^k}\equiv \Gamma_{\beta i}^{\alpha}\boldsymbol{W}_{\alpha}^{\beta}+f_{ik}\boldsymbol{w}^k$$

に両種の場の方程式を代入しても，$\partial \boldsymbol{S}_i^k/\partial x^k=0$ が導かれる．重力場の方程式は（101）に $\boldsymbol{W}_i^k=0$ を代入しても求まる．場の法則と，それに結びついた保存則は，（95）および（100）によって，つぎのような見とおしのよいものにまとめられる：

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}^i(\pi)}{\partial x^i} = 0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{S}^k(\xi)}{\partial x^k} = 0.$$

おそらく自然界に実在すると思われる場合（それについては前節で論じたが）にとって，“慣性”と“力”の対立は，その特徴的な事実といえよう．このことは，$\lambda = \text{const.}$ という測度の規格を導入して作用密度の中の $\lambda^2 \cdot \sqrt{g}$ という項を

$$\boldsymbol{G} + \varepsilon^2 \sqrt{g}\{1 - 3(\varphi_i \varphi^i)\}$$

の形に書きあらわすことによって明らかにすることができる．この作用密度は g_{ik}，$g_{ik,r}$ および φ_i だけであらわされる．これらの量に対しては，任意の世界点において，適当な座標系を設け，その点において局所的に

$$g_{ik} = \begin{cases} 0 : (i \neq k) \\ \varepsilon_i = \pm 1 : (i = k), \end{cases} \qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} = 0, \qquad \varphi_i = 0$$

という特別な値をとるようにさせることが必ずできる〔つまり $\partial^2 g_{ik}/\partial x^\alpha \partial x^\beta$ や $\partial \varphi_i/\partial x^k$ は上の作用密度には含まれていない．したがって上述のような簡単な値をとらせれば，上の作用密度は ε^2 だけになる：訳者〕．これに反して座標系や測度の変換によって消去できない曲率は，作用密度の中の他の項，すなわち $\boldsymbol{l}$ のなかに含まれる．したがってこの項だけが慣性に対抗し，質量には比例しない力を出現させる原因である．$\delta \boldsymbol{v}^k$ を決定するさいに，前にも述べたように，一般の場合にはある任意性が顔をだすが，上に述べた作用密度ではこの任意性はでてこない．というのは $\boldsymbol{W}$ の中に g_{ik} の 2 階微分が含まれないからである．しか

しこのために測度変換および座標変換に対する不変性は喪失する．それでも，$\boldsymbol{s}^k(\pi)$ および $\boldsymbol{S}^k(\xi)$ の π ならびに ξ^i に対する係数，つまり“場の流れの密度” $\boldsymbol{s}^k$ および“エネルギー密度” $\boldsymbol{S}_i^k$ に議論をかぎるならば，一般論で述べたことは本質的にはそのままなりたつ〔この部分は，不変な作用密度（したがって $\partial^2 g_{ik}/\partial x^\alpha \partial x^\beta$ を含むもの）から導かれた量とそれぞれ一致するからである：訳者〕．

$\boldsymbol{h}^{ka}$ の定義（92），電磁場の方程式（86），および恒等式（95_2）を比べると

$$\boldsymbol{h}^{ik} = \boldsymbol{f}^{ik}, \qquad \boldsymbol{s}^i = -\frac{3\varepsilon^2}{\alpha}\varphi^i\sqrt{g}$$

とおかねばならない．これに対応する微分型の保存則（88）（これは前節でも示されたが）は実際二つの方法で導かれる．すなわち電磁場の方程式 $\boldsymbol{w}^i=0$ に $\partial/\partial x^i$ をほどこしても導くことができるし，また重量場の方程式 $\boldsymbol{W}_i^k=0$ から縮約によっても導ける．δ' として，本来の意味における並進（つまり $\xi^i=\mathrm{const.}, \pi=0$ を（96）に代入した変分）を考えた場合，$\boldsymbol{W}$ が，なまに x に依存しないならば，$\boldsymbol{W}$ がどのような変換性をもっていようとも，つねに

$$\delta'\int \boldsymbol{W}dx = 0$$

がなりたつ．したがって

$$\boldsymbol{W} = -\alpha\boldsymbol{l} + \boldsymbol{G} + \varepsilon^2\sqrt{g}(1-3\varphi_i\varphi^i)$$

のときは，場の方程式 $\boldsymbol{w}^i=0$，$\boldsymbol{W}_i^k=0$ を使えばつぎの式が導かれる：

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial x^k}({}^*\boldsymbol{S}_i^k\xi^i)=0, \qquad \left[\text{または}\quad \dfrac{\partial}{\partial x^k}\left(\boldsymbol{S}^k(\xi)\right)=0\right]\\ \text{ここに}\\ {}^*\boldsymbol{S}_i^k=\boldsymbol{W}\delta_i^k-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}^{\alpha\beta,\ k}\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}+\alpha\boldsymbol{f}^{kr}\dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x^i}\end{array}\right\} \tag{102}$$

〔上の式は例えば（100）に $\pi=0$，$\xi^i=\text{const.}$ を代入し，さらに $\boldsymbol{W}_i^k=0$ を使えば導かれる〕．ここに述べた方法は，重力場のテンソル型のエネルギー密度の成分を求めるために，§37 ですでに用いた方法である．しかし（102）では，電磁場について正しいエネルギー・運動量テンソル密度がでてこないことに気づくであろう．実際，正しいエネルギー・運動量テンソル密度を得るには，われわれの一般論に従ってマックスウェルの方程式をまずつぎの形に書かねばならない．

$$\frac{\partial\left(\pi\boldsymbol{s}^i+\dfrac{\partial\pi}{\partial x^k}\boldsymbol{f}^{ik}\right)}{\partial x^i}=0.$$

ここで $\pi=-\varphi_i\xi^i$ $(\xi^i=\text{const.})$ とおき，その結果に α をかけて（102）の上の式に加えればよい．その結果は

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\boldsymbol{S}_i^k\xi^i)=0$$

となる．このようにして擬テンソル密度 $\boldsymbol{S}_i^k$ がでてくる．この $\boldsymbol{S}_i^k$ はつぎのようなものである：

$$S_i^k = {}^*S_i^k - \alpha s^k \varphi_i - \alpha f^{kr} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^r}$$
$$= \left(G\delta_i^k - \frac{1}{2} G^{\alpha\beta,k} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \right) - \alpha (l\delta_i^k - f^{kr} f_{ir})$$
$$+ \varepsilon^2 \sqrt{g} \{1 - 3(\varphi_r \varphi^r)\} \delta_i^k + 6\varepsilon^2 \sqrt{g} \varphi^k \varphi_i .$$

この第1項

$$G\delta_i^k - \frac{1}{2} G^{\alpha\beta,k} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}$$

は重力場のエネルギー・運動量密度を示し，

$$l\delta_i^k - f^{kr} f_{ir},$$

は電磁場のエネルギー・運動量テンソル密度を示す．最後の二つの項（ε^2 を係数にもつ項）は宇宙論的な付加項である．以上のようにしてはじめて正しいエネルギーの表現に到達することができる．この表現を得るには，世界の仮想的変形は，アインシュタインの意味（つまり移動に際して大きさ l の変化を $dl=0$ とする立場）ではなく，ここに今まで述べた純粋の無限小幾何学の意味で，計量と線素を不変にする［つまり大きさ l は，$dl=-l(\varphi_i \xi^i)$ のように合同に移されるものとする］変形であると規定しなければならない．

もちろん，種々の異なった変形のしかたに応じて，（つまりアインシュタインの意味での大きさを変えない変形とか，上述のような変形等のそれぞれに応じて）場に対して，それぞれ異なった形の微分型保存則が導かれることがわかる．しかしこれらのなかで，本来の正しいエネルギー保存則は，

それが物質粒子の力学的基本方程式と結びついているという特徴をもつ．この結びつきは場のエネルギー量の特性ならびにその基礎となっている作用原理にもとづくものである．

2 次のすべての有理積分不変量（すなわちその被積分関数は，g_{ik}，$\partial g_{ik}/\partial x^r$，$\partial^2 g_{ik}/\partial x^r \partial x^s$ ならびに φ_i，$\partial\varphi_i/\partial x^r$ の有理整関数に $\sqrt{g}$ をかけたもの）は R. ワイツェンベックによって決定された [45]．このような量は全体で 6 個存在し，そのうち 2 個はその符号が世界の中に仮定したネジの方向の定義に依存する．しかし R. バッハは，この二つの不変量の変分は恒等的に 0 となることを証明した [46]．また彼の計算によると，他の 4 個の不変量のある 1 次結合を作ると，それの変分もまた恒等的に 0 となることが判明した．それゆえ，真に独立な不変量は 3 種類，つまりいままで作用原理に用いた不変量のほかには，ただ 1 個だけなお新しいものが存在することになる．しかし以前，表明した意見とは反対に，現在私は，この新しい不変量は自然界では何の役にもたたないということを確信している．なぜならば，もしそれを作用原理の中に導入すれば，4 次の微分方程式を得ることになる．いま電磁場は存在しないものとし，また宇宙項を無視することにする．ただしあるきまった長さの単位を基礎に用いることにする．その場合，パウリ [47] の研究によれば静的球対称重力場は，アインシュタインの理論のように，ただ 1 個の任意定数（すなわち重力の源の質量）をもつのではなく，2 個の任意定数をもつことになる〔これらの定数に物理的意味をあたえることは

むずかしい：訳者〕．特にそのような作用原理から普通の力学の方程式に到達することはまったく不可能であるように思われる．また計量基本二次形式 ds^2 と物さしや時計のふるまいの間に従来存在した関係を再び導くこともできないであろう．しかし自然が，この第三の不変量を拒否する確固たる理由をここに述べることは私にはできない．なぜなら，場の方程式を 2 階微分方程式に制限するということはあまりにも形式的すぎるために，作用量を決定するための内的制限を見つけたくても，それはできないからである．

付録 IV では，エディントンによって提唱された場の幾何学的理論 [48] について簡単な概説があたえられている．この理論は今までのところ，実験事実との結びつきが確立されていない．この理論は，計量から出発するのではなく，エーテルの本来の構造を示すものはアフィン接続であるとして，それを理論の基本に採用する．これにつづくその他の研究にはバッハ，アインシュタイン自身，ならびにカルツァ等の研究がある．

われわれは，思索の霧のなかに自己を見失いたくないならば，いまわれわれが到達した場所にしっかりとふみとどまるべきである．今まで述べてきたことの価値ある収穫として手にいれたものは，それによって損われることはない．われわれのまわりの現実の構成において，**空間と時間**，すなわち外的世界の全体を埋めつくしている媒体とその構造が演ずる役割は，次第に明らかになってきた．ユークリッド的な，先験的にきまった計量という考えから，物質によ

ってその様子が変化しうる計量場（これは重力場の現象と同時に電磁気的性質をも包括する）という考えにわれわれを導いた道，われわれが歩んできたこの道をふりかえってみるとき，何人もこの道を進んできたことによって手にいれた“自由”の感覚に圧倒されないものはいないであろう．またこの世界全体，それは逐次，ある整理，分類された多様性のもとに表現されるべきものであるが，それをひとつの観点のもとに包括しようと試みる者は，誰でも前述のような感慨にうたれるであろう．——いままで堅く閉ざされた鳥かごの中に，とじこめられていたわれわれの思索は突如，爆発した．かつてピタゴラスとケプラーがそれぞれ夢にえがいた二つの領域のあいだの調和を示す一対の基礎和音が快くわれわれの耳にひびいてくる．——物質についても立ちいった知識をもたないかぎり，われわれは空間ならびに時間についてその解析をおしすすめることはできない．したがってわれわれはなおひとつの謎のまえにたたされていることになる．この謎は場の物理学だけで解決できるとは思えない．物質の問題に今なお，おおいかぶさっているこの暗やみの中に最初に現われる光はおそらく量子論であろう．

付録 I

リーマン幾何学における不変量（本書下巻 37 ページ参照）

リーマン空間において，その計量 g_{ik}，およびその微係数 $\partial g_{ik}/\partial x^r$，$\partial^2 g_{ik}/\partial x^r \partial x^s$ までの関数で，2 階微係数については 1 次関数である不変量はただ 1 個存在し，それは R であることを証明しよう．

いまこのような不変量を J とすれば，仮定により

$$J = \sum \lambda^{ik,rs} g_{ik,rs} + \lambda$$

の形に表わされる．ここで

$$g_{ik,rs} = \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^r \partial x^s}.$$

また λ および $\lambda^{ik,rs}$ は g_{ik} およびその 1 階微係数の関数である．さらに対称条件

$$\lambda^{ik,rs} = \lambda^{ki,rs}, \qquad \lambda^{ik,rs} = \lambda^{ik,sr}$$

を満足するとしてよい．いま任意の 1 点 O におけるこの不変量について考えよう．点 O において直交測地座標系を設けたとすれば，そこでは[1)]

$$g_{ik} = \delta_i^k, \qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} = 0$$

がなりたつ．したがってこの点で λ はある定数となる．ここではつぎのような座標変換を行なっても，上述の直交測地座標系の特性はそのまま保持される：

1）直交一次変換，

2）$x^i = x^{i'} + \frac{1}{6}\alpha^i_{krs} x^{k'} x^{r'} x^{s'}$.

係数 α は k, r, s について完全対称とする．

ここでいま，別にユークリッド空間を考えて，その中の任意の 2 個のベクトル $x=(x^i)$，$y=(y^i)$ の双二次形式

$$G = g_{ik,rs} x^i x^k y^r y^s$$

をとりあげてみよう．この係数 $g_{ik,rs}$ は (ik)，ならびに (rs) のそれぞれについて対称ならばなんでもよい．x, y に任意の直交一次変換を行なえば，$g_{ik,rs}$ は，G の値が不変という条件から，x, y 等と反傾に変換される．ところで，点 O における計量場 g_{ik} の 2 階微分である $g_{ik,rs}$ の直交一次変換に対するふるまいは，上に述べた双二次形式の係数としての $g_{ik,rs}$ のふるまいとまったく同じであるから，このようなふるまいをする任意の係数 $g_{ik,rs}$ を用いたとき，

$$\lambda^{ik,rs} g_{ik,rs} \tag{1}$$

は任意の直交一次変換に対して不変でなければならない．さらに変換 2）に対しては微係数 $g_{ik,rs}$ は

1）訳者注：ここでは，リーマン空間は一般的に n 次元とするが，その計量基本形式は正定符号をもつものとする．したがって，直交測地座標系では，本来のユークリッド空間と同様に添字について，上下の区別をする必要がない．

$$g'_{ik,rs} = g_{ik,rs} + \frac{1}{2}(\alpha^i_{krs} + \alpha^k_{irs})$$

のように変換されることが，容易にわかる．そこで J の不変性から

$$\lambda^{ik,rs}\alpha^i_{krs} = 0 \tag{2}$$

が成立しなければならない．ここで α は k, r, s について完全対称な任意の定数係数である．

ここで点 O の近傍はユークリッド空間とみなせるから，しばらくユークリッド空間としての考察をすすめる．いま $x^1y^1 + x^2y^2 + \cdots + x^ny^n$ を $(x \cdot y)$ で示すことにする．上にあげた双二次形式の例として特に

$$G = (a \cdot x)^2 \cdot (b \cdot y)^2$$

という形のものを考えよう．ここに a, b は任意の 2 個のベクトルである．つまり $g_{ik,rs} = a_i a_k \cdot b_r b_s$ とおいたことに相当する（いまは添字の上下の位置の区別は不要）．あるいはこの a_i, b_r のかわりにそれぞれ x_i, y_r とかくことにすると，(1) は

$$\Lambda = \Lambda_x = \sum \lambda^{ik,rs} x_i x_k y_r y_s \tag{1*}$$

となる．つまり (1*) は x, y の任意の直交一次変換に対して不変でなければならない．また (2) の α についても，特に

$$\alpha^i_{krs} = x_i y_k y_r y_s$$

とおけば，

$$\Lambda_y = \sum \lambda^{ik,rs} x_i y_k y_r y_s \equiv 0 \tag{2*}$$

となる（Λ_y を導くにはつぎのように考えると好都合であ

る．いま

$$\Lambda_{x,x'} = \sum \lambda^{ik,rs} x_i x_k y_r y_s$$

とおく．この x' を x と一致させたものが Λ_x である．また x' を y とおけば Λ_y となる．すなわち $\Lambda_x = \Lambda_{x,x}$，$\Lambda_y = \Lambda_{x,y}$）．(1*) から Λ は一般に

$$\Lambda = \alpha(x\cdot x)\cdot(y\cdot y) - \beta\{(x\cdot y)\}^2 \qquad \text{(I)}$$

という形をもつべきことがわかる (α, β は任意の定数係数)．さらに上述の（ ）の中の注意にしたがって (I) から Λ_y を求めれば，(2*) によって

$$\alpha = \beta \qquad \text{(II)}$$

でなければならない．これですべてが解決した．なんとなれば直交測地座標系では，上の結論から

$$J = \alpha\{g_{ii,rr} - g_{ir,ir}\} + \lambda$$

となる．一方，この座標系を用いるときは，リーマンのスカラー曲率は

$$R = g_{ik,ik} - g_{ii,kk}.$$

したがって，この座標系を用いたとき，

$$J = -\alpha R + \lambda \qquad (*)$$

が成立する．両辺とも不変量だから，この等式は任意の座標系でも当然なりたつ．

(I) の証明：いまユークリッド空間において，特別な座標系を設ける．すなわち x はその第1軸の方向をむき，y は第1軸と第2軸の決定する平面 (1, 2) の中にあるものとする．したがって

$$x = (x^1, 0, 0, \cdots, 0), \qquad y = (y^1, y^2, 0, \cdots, 0)$$

$$\Lambda=(x^1)^2\{a(y^1)^2+2by^1y^2+c(y^2)^2\}$$

となる．ところで，第２軸の向きは任意にとってよいはずである．この向きを逆向きにしても Λ の値は不変でなければならないから $b=0$ である．したがって

$$\Lambda=c(x^1)^2\{(y^1)^2+(y^2)^2\}+(a-c)(x^1)^2(y^1)^2$$
$$=c(x\cdot x)\cdot(y\cdot y)+(a-c)\{(x\cdot y)\}^2.$$

（II）の証明：（I）で与えられた Λ から

$$\Lambda_{x,x'}=\alpha(x\cdot x')\cdot(y\cdot y)-\beta(x\cdot y)\cdot(x'\cdot y)$$

が導かれる．したがって

$$\Lambda_y=\Lambda_{x,y}=\alpha(x\cdot y)\cdot(y\cdot y)-\beta(x\cdot y)\cdot(y\cdot y).$$

そこで $\Lambda_y\equiv 0$ から $\alpha=\beta$ でなければならない．（証明おわり）

以上の証明では，われわれはリーマン空間の計量基本形式が正定符号であることを仮定した．正定符号ではなく，他の慣性指数をもつ場合には，（I）の証明において，若干の修正が必要である．

J の n 次元体積積分を行なうさいに，部分積分法により g_{ik} の２階微係数が取り除かれるものとしてよいのは，$\lambda^{ik,rs}$ が実は g_{ik} だけに依存し，$\partial g_{ik}/\partial x^r$ を含まぬためである．しかしこの性質は，R の唯一性の証明には，使う必要はない．――上の結論（＊）によれば，J は R に定数をかけたものばかりでなく，それにある任意の定数 λ を加えても，やはり不変量であることがわかった．この定数項の物理的意味については §39 を参照されたい．なおここに述べた定理については：Vermeil, Nachr. d. Ges. d.

Wissensch. zu Göttingen, 1917, S.334-344 を参照されよ．さらにここの証明と同じようにして，$g_{ik}, \partial g_{ik}/\partial x^r$, $\partial^2 g_{ik}/\partial x^r \partial x^s$ の関数で，2 階微係数については一次式である 2 階対称テンソルは $\alpha g_{ik} + \beta R g_{ik} + \gamma R_{ik}$ にかぎることも証明される．

付録 II

測地的歳差運動（本書下巻 115 ページ参照）

（48），（49）で与えられた太陽の静的重力場の中を運動する質点が，自分の世界線を描きながら，ひとつの世界ベクトル（ξ^i）を自分と一緒に持ち運ぶとする．またこの ξ^i は各瞬間に，常に平行移動をこうむるものとする．いま ξ_i が，ある瞬間に，質点の世界方向に垂直だとすれば，この直交関係はその後も持続される．このような ξ^i を，例えばコマの回転軸のふるまいによって実現することができる．——もちろんその場合には，コマの大きさは質点とみなしてもよい程に小さいものとする．またその質量は回転軸のまわりに対称的に分布しているものと仮定する．いまコマの描く空間的軌道が円形である場合を考えよう．ここに得られる結論をコマのかわりに地球に応用する場合には，地球自身の大きさを無視し，さらに地球の公転軌道の離心率をも無視すればよい．

いま地球が一様な角速度（円軌道を描く角速度）をもって運動（公転）している平面（x^1, x^2）内に極座標（r, φ）を導入する．ある瞬間地球（またはコマ）の方位角 φ が $=0$

とする．この時の地球（またはコマ）の運動の世界方向は

$$dx^0 = dt,\quad dx^1 = 0,\quad dx^2 = rd\varphi,\quad dx^3 = 0$$

である．本書下巻81ページに与えられた太陽の重力場を示す三指標記号を使うと，この世界方向における ξ^i の無限小平行移動はつぎの式であらわされる：

$$d\xi^0 = -\frac{f'}{f}\xi^1 dt,\quad d\xi^1 = -\frac{ff'}{h^2}\xi^0 dt - \frac{lr^2}{h^2}\xi^2 d\varphi,$$

$$d\xi^2 = 0,\quad d\xi^3 = 0.$$

ξ^1, ξ^2 のかわりに動径方向，および円軌道の接線方向の成分 ζ^1, ζ^2 を導入すると，$\varphi = 0$ の位置ではもちろん，$\xi^1 = \zeta^1$，$\xi^2 = \zeta^2$ となる．しかしその微分については $\varphi = 0$ の位置でも

$$d\zeta^1 = d\xi^1 + \xi^2 d\varphi,\qquad d\zeta^2 = d\xi^2 - \xi^1 d\varphi$$

となる．ここで一定の角速度 $d\varphi/dt$ を ω とかく．また一様性のために $\xi^0 = \zeta^0$，$\xi^3 = \zeta^3$ とおけば，上の平行移動の式は

$$\frac{d\zeta^0}{d\varphi} = -\frac{f'}{\omega f}\zeta^1,\quad \frac{d\zeta^1}{d\varphi} = \frac{1}{h^2}\zeta^2 - \frac{ff'}{\omega h^2}\zeta^0,$$

$$\frac{d\zeta^2}{d\varphi} = -\zeta^1,\quad \frac{d\zeta^3}{d\varphi} = 0. \tag{*}$$

x^3 軸のまわりの軸対称性から，上の式は単に $\varphi = 0$ の点のみならず，円軌道上のどの点においても成立する．

さて ω をまず決定しよう．まずこの方程式は，ξ として地球自身が描く世界線の接線ベクトルを採用しても，成立しなければならない（なぜなら，世界線は測地線になっているから）．そこで

$$\zeta^0 = 1, \quad \zeta^1 = 0, \quad \zeta^2 = r\omega = \text{一定}, \quad \zeta^3 = 0$$

という定数ベクトルを（＊）に代入すれば，第２式から，

$$r\omega = \frac{ff'}{\omega},$$

すなわち

$$\boxed{\omega^2 = \frac{m}{r^3}}$$

が導かれる．したがって，もしわれわれの計算の基礎に用いている正準座標系を使って軌道半径と軌道運動の周期を表わせば，惑星の円形軌道に対してケプラーの第三法則がたしかになりたっていることがわかる．

地球の世界線の接線方向を $\boldsymbol{r}$ とする．ある瞬間において，地球が存在する世界点を起点として，その点における $\boldsymbol{r}$ に垂直につき出ているベクトルの全体は，その瞬間における“地球の空間”を張る．この空間の中心が地球の占めている場所である．いま地球の円軌道上で $\varphi=0$ の点にわれわれがいるものとすれば，そこでの $\boldsymbol{r}$ に対する ξ の直交条件は

$$f^2\xi^0 dt - \xi^2 r d\varphi = 0, \quad \text{あるいは} \quad \xi^0 : \xi^2 = r\omega : f^2.$$

いま f のほかにつぎの式によって e という量を導入する：

$$e^2 = f^2 - (r\omega)^2 = 1 - \frac{3m}{r}.$$

これを用いて３個のベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ をつぎのように定義する：

$$\boldsymbol{e}_1 = (0,\ f,\ 0,\ 0),$$

$$e_2 = \left(\frac{r\omega}{fe},\ 0,\ \frac{f}{e},\ 0\right),$$

$$e_3 = (0,\ 0,\ 0,\ 1).$$

これら3個のベクトルは，いずれも $\boldsymbol{r}$ に対する直交条件を満足しており，さらに互いに直交する．したがってこれらは“地球空間”におけるひとつの直交座標軸とみなすことができる．実際太陽のまわりの計量基本形式を用いて上の3個のベクトルの大きさを計算すれば，すべて -1 に規格化されていることがわかる．ところで $\boldsymbol{e}_3$ は地球の公転面に垂直であるから，座標面［$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$］を“地球空間”内の公転面と呼ぶべきである．この中で $\boldsymbol{e}_1$ 軸は太陽の方向を示す．われわれは地球から観測された空間的な出来事をこの座標系を基準として記述することによって，“太陽に対して方向づけられた地球空間”を問題にすることになる．いま地球の自転軸 $\boldsymbol{d}=(\zeta^0,\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3)$ が

$$\boldsymbol{d} = \eta^1\boldsymbol{e}_1 + \eta^2\boldsymbol{e}_2 + \eta^3\boldsymbol{e}_3$$

によって与えられたとすれば，

$$\zeta^0 = \frac{r\omega}{fe}\eta^2,\quad \zeta^1 = f\eta^1,\quad \zeta^2 = \frac{f}{e}\eta^2,\quad \zeta^3 = \eta^3.$$

いま ζ のかわりに，これに比例する新しい量 η をつかって方程式（$*$）を書けば $d\zeta^0/d\varphi$ の方程式と $d\zeta^2/d\varphi$ の方程式とは同じものになり，つぎのような結果が導かれる：

$$\frac{d\eta^1}{d\varphi} = e\eta^2,\quad \frac{d\eta^2}{d\varphi} = -e\eta^1,\quad \frac{d\eta^3}{d\varphi} = 0.$$

この解はただちに求まる：

$$\eta^1 = \cos(e\varphi), \quad \eta^2 = -\sin(e\varphi), \quad \eta^3 = \text{const.}$$

この解はつぎのような直観的な意味をもつ：**太陽に向かって方向づけられた地球空間においては，地球の自転軸は，一様な回転速度をもって公転の向きとは反対向きに円錐面にそってスリコギ運動をする．この円錐面の頂点は地球とともに運動し，円錐の中心軸は地球の公転面に垂直に立っている．**地軸のこのような周期的運動は一年間の時間的長さの変化（つまり歳差）として観測される．この地軸のスリコギ運動の周期が１“太陽年”（または１回帰年）である．これに対して１“恒星年”とは地球がその円軌道を一周するに要する時間のことである．１恒星年のあいだに太陽から見た地球の方向角 φ は 2π だけ増加する．これに対して，$e\varphi$ が 2π だけ増加するには１太陽年かかる．つまり１太陽年のあいだに φ は $2\pi/e$ だけ増加する．したがって１**太陽年は１恒星年の $1/e$ 倍である．**したがって１恒星年たっても，地軸はまだその最初の位置にもどることはできない．そのときの地軸の公転面上への射影は，正の方向（つまり公転の方向）に

$$2\pi(1-e) = 0.019''$$

だけ回転した位置にある．恒星年は直観的には，太陽が星座のなかで，最初と同じ位置にたちもどったことにより確認される．もし恒星系の固有の運動を無視することにすれば，星座の中の同じ位置という言葉はきわめて明確な意味をもっている．なんとなれば，１恒星年たった後には，地上の観測者にとって星空は再び完全に以前と同じ姿に見

えるからである．したがって計算による歳差は，直接，地軸の恒星系に対する位置の偏移として確かめられる．同じ事情はまた，春分点［これは $\eta^1=0$，$\eta^2=-1$ となる場合の，地球の（軌道上の）位置のことである］が年々，円軌道上で $2\pi\left(\dfrac{1}{e}-1\right)$ という小さな角だけ地球の公転と同じ向きにすすむことによっても表わすことができる．

ここに計算された歳差効果は，地軸に対する他の摂動よりもずっと小さいので，実験的に検証することはできない．太陽や月が回転楕円体である地球におよぼす回転能率にもとづく普通の歳差運動がここに述べた相対論的効果の 2～3000 倍も大きいうえに，さらに正確にはまだわかっていない地球内部の質量分布が地軸の歳差運動に影響を与えるからである．

付録 III

赤方偏移と宇宙論（本書下巻 65-66，177 ページ参照）

静的重力場の中に静止している原子から放出された光は，“静的時間”（つまり，この時間を用いたとき，計量場が時間に無関係な静的場となるような時間）を用いたとき，その振動数がいたるところで一定となることは，既に本書下巻 65 ページで述べた．しかしこのことはまったく形式的な性質のもので，そのうえ，その意味は一意的でない．なんとなれば事情によって——例えば物質の存在しない双曲面的世界におけるように——種々の異なる静的時間が定義できる場合がある．しかもこれらの各種の時間が一次変換では互いに結ばれないような場合が存在するからである．ここで私は，上に述べた“振動数一定”という事情の背後に，つぎのような簡単な（静的場に限らず，いかなる場に対しても）物理的事実がかくされていることをこれから示そう：点光源から発射された光の位相が一定な（3 次元的）面は，世界のなかで，未来に向かって開いたゼロ円錐面によって表わされる．このような円錐は光源の世界線上に等間隔にならんだ点をそれぞれ頂点として多数存在する[1]．

われわれは，光源の世界線からつぎつぎに出てくる同位相のゼロ円錐面を観測者の世界線がどのように貫通するかに注意を払うことによって，光源の世界線上の位相変化のリズムから，観測者により知覚される位相変化の様子を知ることができる．いま光源の世界線の固有時間を s，観測者のそれを σ とする．光源の世界線上の任意の点 s から出たゼロ円錐が，観測者の世界線上の点 σ において，これを切るとすれば，s に応じて σ はただ1個きまる．したがって $\sigma=\sigma(s)$ となる．いま光源のおかれた場所でおこるある現象が周期的現象（たとえば，光源の発射する光波の振動）であり，しかもその周期は無限に短いとすれば，これは観測者から眺めても，やはり周期的である．しかし観測者から見たこの現象の周期は，光源のある場所における周期の $\alpha=d\sigma/ds$ 倍である（ここで周期というときは，もちろんそれぞれの場所における世界線の固有時間を用いて測るものとする）．いま観測の対象となっている光源とまったく同じ構造をもった光源を観測者の手もとにも置いたとすれば，観測者の手もとにある光源が出す振動数 ν の光と同じものを遠方の光源が発射したとき，それが観測者の眼にとどいたときの振動数は ν/α となる．つまり後者は前者とは若干

---

1) ここで問題になっていることに関連して，ナウハイムにおける相対性理論の会議についてのワイルの報告の中で彼が述べた批判は，これによって決着がついたことになる［Jahresber. D. Math. Vereinig. 1929, S.54 および Physik. Zeitschr. 22 (1921), S.478 参照］.

ずれる.

いまわれわれの世界がド・ジッターの双曲面的世界であるとするとき，われわれの原理に従えば上に導かれた関係により，仮に遠方の天体上で振動数の測定を行なったとき，光のスペクトルがどのようになるかについて推論ができることになる．ここでわれわれは，ただひとつの，最初から連結した作用域を扱うことにする．また宇宙のなかの質量分布は非常に希薄で，その結果，それぞれの星が作る重力場の影響を無視してもかまわないと仮定する．1個の恒星の世界線は，∞^3 個の測地線のひとつの束（これは未来に向かってひろがっている）に属する．この束に属する測地線が未来に向かって発散（ひろがる意味）しようとすることは，物質が互いに他から離脱していこうとする普遍的傾向のあらわれである．これは作用原理のなかの宇宙項によって表わされる．ここに述べたような，ごく弱い重力の影響のもとにある星群の標準状態は，初等的な宇宙論における天体の標準状態にくらべられるべきものである．後者は無限に広いユークリッド型の空間の中に，無限に小さい質量密度で，静止状態にある物質が一面に分布している状態である．そこでは各々の星の世界線は ∞^3 本の平行な世界直線の束を作る．あるいはまたわれわれの想定した天体の状態はアインシュタインの宇宙論における標準状態ともくらべられるべきものである．アインシュタインの宇宙論では，一様に分布した物質でみたされた閉じた空間がわれわれの宇宙である．その際物質の密度は，アインシュタイン

の方程式の宇宙項にもとづく物質の離散しようとする傾向と，重力による引力とがちょうど相殺されるような密度である．各々の星の世界線は ∞^3 本の測地線の束を作る．この束は静的空間座標が時間の経過に無関係にそのまま保持されるということによって特徴づけられている．

われわれが考えている双曲面的世界では，天体系の中のひとつの星に住む，寿命が無限に長い観測者にとって，物質系（観測者の住む星はこの中に属する）の作用領域によっておおわれる世界の部分，つまり“**物質宇宙**”のなかで，ただつぎのような楔形の部分だけが観測可能である：その部分とは第 22 図の縦線で塗りつめた部分であり，これは適当な座標変換（すなわち§39 の式（78））によってアインシュタイン型の静的座標と結びつく部分である．

したがってこの観測者にとって，“静的”とは何を意味するか，またこの観測者の立場からみて，“空間”とか“時間”とは何を指すかは明白である．この観測者から見た他の星までの空間的な距離は永続的に増大しつつあるように見える（これは，測地線の束が時間の経過とともに離散するためである）．しかもすべての星は観測者から彼と星を結ぶ直線の方向（つまり星の動径方向）に飛び去りつつあるように見える．ここに述べた事情は，天体系のどの星を観測者の住む星としても，まったく同じようになりたつ．さらに各々の星からの光のスペクトルは，観測の対象となった星が遠方にあるほど，それだけ大きい赤方偏移を示す．われわれの原理にしたがって計算をすれば，なんらの困難

もなしにつぎの結果が導かれる．すなわち光源の位置で振動数が ν の光は，観測器に到達したとき ν/α となる．ここで α は

$$\alpha = 1 + \mathrm{tg}\frac{r}{a},$$

r は観測された瞬間における，観測者から光源の星までの距離（静的座標系を用いた際の距離）を示す．また a は世界の曲率半径である．

実際には渦状星雲——これはおそらく銀河系の影響外にあってしかも観測可能な唯一の天体であろう——からの光のスペクトルには，地球を原点にとった場合の星雲の動径方向の速度（およそ 1000 km/sec）に相応した，規則的な大きさの赤方偏移が存在することがたしかめられた．このことについては，既にこれを宇宙論的に説明しようとするド・ジッターの試みがある．初等的なユークリッド空間に基礎をおく宇宙論でも，あるいはまたアインシュタインの宇宙論でもこのような赤方偏移を導くことができないことは注目すべきことである．もちろん，今日でもなお，上に述べたわれわれの説明が正しいものと主張することはできない．渦状星雲の性質や，地球からの距離についての従来のわれわれの見解はさらに明確にされる必要がある．しかしそれにもかかわらず，上に述べたような説明の可能性もあるということは，心にとどめておく必要があろう．大きな渦状星雲までの距離として，新しい仮定にもとづいた光行差による決定法にしたがって，アンドロメダ星雲に対し

て $10^6 \sim 10^7$ 光年と仮定すれば，世界の半径 a は大体 10^9 光年となる．ここに概算された宇宙半径と電子半径の比は 10^{40} であるが，これが，電子半径と電子の質量の重力半径の比に大体等しいことは，注目に値しよう．アインシュタインの定数 κ が異常に小さいことの原因が電子の大きさとこの宇宙全体のそれとの間の異常な関係にもとづくという考え，あるいは結局はおなじことであるが，κ の異常な値が，宇宙に存在する電子の総数が異常に大きいということにもとづくという推論を，上述の結果は強く支持しているように思われる．

付録 IV

アインシュタインの理論の世界幾何学的拡張

（本書下巻 226 ページ参照）

エディントンの理論はつぎの考えから出発する．いまある小さな物さしを，ある場所から他へ移しても，またある場所で，一点のまわりに回転させても，その長さが不変なことは一種の調整（制約）にもとづくものであるという考えである．本書の本文で述べた理論で，スカラー方程式 $F = \mathrm{const.}$ が，剛体の物さしで再現することのできる測度のある規格を定義することを示したが，これと同じようにエディントンは，方程式 $F_{ik} = \lambda g_{ik}$（$\lambda =$ 定数）により，すべての方向に対する計量 g_{ik} の定義を与えたいと考えた．実際，電磁場を無視すれば，宇宙項を含むアインシュタインの方程式では，2 階曲率テンソルと，計量基本テンソル g_{ik} の間にこのような比例関係式が成立している．そこでこの考えに対応して，世界エーテル（つまり時空）の元来の状態を記述するものとして，エディントンはアフィン接続，すなわち“慣性場” Γ^r_{ik} を基本的な量と考えた．この Γ^r_{ik} から 2 階の曲率テンソル F_{ik} を作ると，測地座標系を

用いれば，それはつぎのようになる:

$$F_{ik}=\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial \gamma_i}{\partial x^k}, \qquad \text{ここで}\quad \gamma_i=\Gamma^{\alpha}_{i\alpha}.$$

この F_{ik} は (i,k) について対称部分と反対称部分に分けられる:

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x^k}+\frac{\partial r_k}{\partial x^i}\right), \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r_k}{\partial x^i}-\frac{\partial r_i}{\partial x^k}\right).$$

この第1の量（i,k について対称な量）を，エディントンは計量場を示すものと考え，第2の部分は電磁場に対応させた．このようにアフィン接続からひとつの対称テンソルと，ひとつの反対称テンソルを導くことができる．しかも後者は電磁場の強さを示すテンソルと同様にポテンシャルから導かれることが示された．しかしこのような類似性以上に，さらに現実の世界との関連についてより詳細な検討はされていない．現実の世界との対応を得るためには，まず慣性質量と重力を生みだす重力質量の等しいことを示すような力学的基礎方程式を導いてみせることが是非とも必要である．しかし，エディントンはさらに場の法則を確立することを断念してしまった．上に述べた2階曲率テンソルと g_{ik} の間の関係は，電磁場が存在しないときは，有効なものとなる．これに対して電磁場が存在すれば，マックスウェル場のエネルギー密度を示すテンソルが付け加わる．電磁場が存在するときは，実験的にかなり確実なものとされているこのような特別な付加項は理論のどこかで必ず再びその姿を現わすべきものである．g_{ik} を g_{ik} 以外の

基本的状態量から導こうとするすべての理論は，必ずつぎの点について説明を与えることが必要である：そこに導かれた g_{ik} を用いた計量二次形式が，決して縮退していないこと，またいたるところで，その慣性指数が一定であること．われわれの理解するところでは，このような要請は計量の本質に属するものであるということが，群論的研究によって明らかになった．すなわち縮退した二次形式をもつ計量は，縮退のない計量とは，たとえその形式的表現が似ていても，本質的に異なっていることが群論的研究によって明らかになった．もしわれわれが，計量 g_{ik} からその本来の性質（距離をあたえるという性質）をとり去ってしまえば，私の考えでは，世界にひとつのアフィン接続の場を賦与することに対して，われわれの経験はなんらの根拠をも与えてくれないことになると思う．物体の慣性にもとづく運動は“射影的特性”を示している．すなわち“運動の世界方向”が自分自身に平行に無限小移動されるという過程が存在することを示している．元来，調整によって決定されるべき，長さのディメンションをもった物質量は，方向をもたない質量であり，方向をもった物さしではないということを考えるとき，エディントンの基本的な考えかたはおそらく，その物理的説得力を失うことになろう（種々の方向における長さの等しいということに対する最も簡単な物理的モデルは水素原子内の電子の円軌道の大きさであろう）．以上のような根拠から，彼の理論のより詳細な検討が行なわれていない現段階では，エディントンの提案をこ

れ以上，議論することはできない．

バッハとアインシュタイン [49] は，計量接続を放棄し，またもちろん，電磁場の説明についても考慮しないことにして，ただ世界の共形的性質だけをもとにして，世界の作用的関係（それは $g_{ik}dx^i dx^k=0$ によって完全に記述される）が説明できるか否かを検討した．特にバッハは，そのような仮定のもとにのみ可能な作用原理の結果を計算によって種々検討した．このような見解は，計量場についてのわれわれの理論（§40）の中に属するものである．それは計量場から作られる，座標変換ならびに測度変換に対して不変な作用量で φ_i をまったく含まないものを求めることに相当する．場の量の2階微分までに制限すれば，そのような作用量は現実に存在する．しかしそれはワイツェンベックの第三の積分不変量を含む．おそらくこれによってこの理論に対する判決は下されたことになろう．

最後にカルツァの研究についても一言ふれておこう [50]．彼は5次元リーマン空間を基礎においた．そのさい余分に現われる成分

$$g_{04},\quad g_{14},\quad g_{24},\quad g_{34}$$

を電磁場のポテンシャルとみなした．また特別な仮定によって g_{44} が邪魔にならぬよう配慮した．

参考文献

(下記の引用文献のはじめに太字で印刷された番号，たとえば上 **27.** はこの文献が引用されている個所のページ数を示す)

緒論および第I章

[1] 上 **27.** この考えの正確な表現は Husserl の “Ideen zur einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie” (Jahrbuch f. philos. u. phänomenol. Forschung Bd. I, Halle 1913) にある.

[2] 上 **54.** 3次元に限らず，一般のアフィン幾何学の組織的扱い，ならびに幾何学的な計算のすべてについては Grassmann の画期的な著作 “Lineale Ausdehnungslehre” (Leipzig, 1844) を参照されよ．3次元よりも多い次元数の多様体という概念を確立するのに，Riemann と同様に Grassmann も Herbart の哲学思想の影響をつよく受けた.

[3] 上 **79.** ここでテンソル計算に用いた組織的な記号や記法は本質的には Ricci と Levi-Civita の発明による: Méthodes de calcul différentiel absolu et Leurs applications, Math. Ann. **54** (1901).

第II章

[1] 上 **157**. もっと詳細な知識を得たいならば，Teubner から出版されている全集 "Wissenschaft und Hypothese" (IV 巻) の中にある Bonola と Liebmann の "Die Nicht-Euklidische Geometrie" を参照されよ．

[2] 上 **164**. F. Klein, "Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie", Math. Ann. **4** (1871), S. 573. さらに Math. Ann. **6** (1873), S. 112 および **37** (1890), S. 544 をも見よ．

[3] 上 **168**. Sixth Memoir upon Quantics, Philosophical Transactions, t. 149 (1859).

[4] 上 **183**. Mathematische Werke (2. Aufl., Leipzig 1892), Nr. XIII, S. 272. なおこれの特別出版もあり，それには Weyl のコメントものっている (2. Aufl., Springer 1920).

[5] 上 **189**. Saggio di interpretazione della geometria non euclidea, Giorn. di Matem. t. VI (1868), S. 204; Opere Matem. (Höpli 1902), t. I, S. 374.

[6] 上 **190**. Grundlagen der Geometrie (3. Aufl., Leipzig 1909), 付録 V.

[7] 上 **195**. Nazione di parallelismo in una varietà qualunque..., Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. 42 (1917).

[8] 上 **203**. このような形式の解答は Weyl の "Reine Infinitesimalgeometrie" Math. Zeitschrift Bd. **2** (1918) にもとづいている．なお本書の原著第 3 版 (1920) 参照．なお以下の論文も参照せよ; Hessenberg, Vebtorielle Begrün-

dung der Differentialgeometrie, Mathem. Annalen Bd. **78** (1917), および J. A. Schouten, Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie, Verh. d. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, 1919.

[9] 上 **209**. 曲率に対するこのような解釈は上に述べた文献 [7], [8] に引用された論文において追求された. Gauss が発見した曲率に対する数式的表現をもとにして, Gauss 自身, 既に, つぎのことを証明した. すなわち曲面上に描かれた 3 本の測地線によりかこまれた三角形の部分の全曲率は, この三角形の外角の和と 2π の差に等しいということである. O. Bonnet はこの結論を一般化し同じことが任意の閉曲線に対してもなりたつことを示した (これについてたとえば Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, Berlin 1921, S. 108 を参照). また Thomson および Tait による有名な Treatise on Natural Philosophy, Part I, §§ 135～137, S. 105-109 (Cambridge 1912) のなかに述べられている運動学的考察は特に注目に値する. そこに述べてあることは基本的には, 曲面上の平行移動や曲率に関する理論をすべて包括している. なお Cartan, Comptes rendus Paris **174** (1922), S. 437 も参照されよ.

[10] 上 **211**. 文献 [9] に引用された Blaschke の講義を参照せよ. Gauss の "theorema egregium" の直観的証明については上に引用された Thomson および Tait の著書を見よ. なお Gauss の "theorema" とは, 曲面のガウス曲率がただ曲面自身の上でなりたつ幾何学だけによりきまり, 曲面を包括している空間の幾何学とは関係ないことを教えるものである.

[11] 上 **212**. ここにとりあげられた観点は, 以下の論文でさらに追求された: Weyl, p-dimensionale Fläche im n-

dimensionalen Raum, Math., Zeitschr. **12** (1922), S. 154. なおつぎの論文も参照せよ；Schouten および Struik, Rend. Circ. Mat. Palermo **46** (1922), および Ak. v. Wetensch. Amsterdam **24** (1922). また Struik, Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie (Springer 1922).

[12] 上 **213.** ここに述べた一般化は Weyl によるものである：“Gravitation und Elektrizität”, Sitzungsber. der Preuss. Ak. d. Wissensch. 1918, S. 465, および “Reine Infinitesimalgeometrie”, Math. Zeitschr. Bd. **2** (1918). さらに本書の原著の第 3 版（1920）参照.

[13] 上 **217.** Beltrami, Ann. di Matem. **7**, S. 203. Lipschitz, Crelles Journal **72** S. 1. F. Schur, Math. Ann. **27** S. 537. さらに Riemann の教授就任講演に対する Weyl のコメント〔文献［4］参照〕の S. 39 ならびに Weyl の小論文：Nachr. d. Ges, d. Wissensch. Göttingen 1921, S. 109–110 も参照せよ．また序文のなかに引用された Weyl の講義 “Mathematische Analyse des Raumproblems” (Barcelona) のなかで，この定理ならびに Helmholtz-Lie の群論的研究に対して徹底的な解説が与えられていることを付記する．

[14] 上 **217.** “Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen”, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1868.

[15] 上 **218.** Lie の研究は偉大な論文：Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen Bd. **3**, Abt. 5 のなかに総括されている．なお Hilbert により，2 次元の場合に対して，基礎となっている仮定が集合論の立場からさらに整理された：Grundlagen der Geometrie (3. Aufl. Leipzig 1909), 付録

IV.

[16] 上 **226**. 文献 [8] に引用された Weyl の研究と密接な関連がある.

[17] 上 **282**. Hessenberg, 文献 [8] に引用された論文の S. 190 参照.

[18] 上 **301**. この観点は私には正しいものと思われるし, またわれわれの研究をすすめることによってその正しいことが保証されると思う. この観点からながめると, 空間の問題に対して, Schouten の形式的な一般化 [Mathem. Zeitschr. **13** (1922), S. 56] はなんら意味のあるものとは思えない. Schouten は計量基本テンソルの存在を簡単に許容した. しかし私にとってはこの仮定こそ問題である. これについて Cartan の考えは注目すべきものであると私は思う: Cartan, Comptes rendus Paris **174** (1922), S. 593, 734, 857, 1104. さらに Wirtinger, Transactions of The Cambridge Philos. Soc. Vol. **22** (1922), Nr. 23 を参照せよ.

[19] 上 **304**. Weyl, Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Massbestimmung, Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 114. 空間の計量の問題の群論的な数式化およびひとつの簡単な特別な場合におけるその解については, 最近 Weyl がスペイン語で話した 2 つの講義のなかに詳細に述べられている.

第 III 章

[1] 上 **307**. 相対性理論に関する基本的な論文は, "Das Relativitätsprinzip" (Blumenthal, 4 Aufl. Teubner 1921) にまとめられている. なお文献の完全な集録については Pauli の "Relativitätstheorie" (Enzykl. d. Math. Wissensch. V, 19), および Teubner から 1922 年に出版された単行本を

参照せよ.
[2] 上 **328**. たとえば Eichenwald, Ann. d. Phys. **11** (1903), S. 1 参照.
[3] 上 **330**. 物質内部においてなりたつ電磁場の法則を導くための Lorentz の考えかたは 4 次元的なやりかたで，相対性理論と完全に一致した形で，W. Dällenbach によって書きかえられた：Dissert. Zürich 1918, および Ann. d. Phys. **58** (1919), S. 523.
[4] 上 **346**. A. A. Michelson, American Journ. of Science **22** (1881), S. 120；Michelson および Morley, 同誌 **34** (1887), S. 333；Morley および Miller, Philos. Mag. Bd. **8** (1904), S. 753 および Bd. **9** (1905), S. 680；H. A. Lorentz, Arch. Néerl. Bd. **21** (1887), S. 103, あるいは Ges. Abhandlg. Bd. **1**, S. 341；Einstein が相対性理論を確立してからこの種の実験は何度も議論された．最近 A. Righi によって与えられた批判（Comptes rendus Paris, 28 April 1919 および 28 Juni 1920）は，私には正しいものとは思えない．
[5] 上 **348**. W. Ritz, Ges. Werke S. 317, 427, 447；これと同じ考えは Tolman, Kunz, Comstock たちによっても提唱された．しかしこのような考えは Einstein の理論の信奉者たちにより再三反撃をこうむった．なおこのような考えを押しすすめることの可能性については，さきに引用した Pauli の著書の S. 549–553 を参照せよ．
[6] 上 **349**. Phys. Zeitschr. **14** (1913), S. 429 および S. 1267. さらに P. Guthnik, Astronom. Nachr. **195** (1913), Nr. 4670, および W. Zurhellen. Astronom. Nachr. **198** (1914), S. 1. ——光速度が振動数に無関係であること

については，黄色および菫色の光について，それらの速さの差がたかだか，光速度 c の 10^{-10} 程度にしかならないことが Shapley によりたしかめられた：H. Shapley, Bulletin 763 der Harvard-Sternwarte.

[7] 上 **351**. F. T. Trouton および H. R. Noble, London Philos. Transact. A **202** (1903), S. 165; Lord Rayleigh, Philos. Mag. **4** (1902), S. 678; D. B. Brace, Philos. Mag. **7** (1904), S. 317, おなじく **10** (1905), S. 71. Boltzmann-Feschrift 1907, S. 576; F. T. Trouton および A. O. Rankine, Proc. Roy. Soc. **8** (1908), S. 420; B. Strasser, Ann. d. Phys. **24** (1907), S. 137. なお，J. Laub による相対性理論の実験的基礎に関する総合報告：Jahrb. f. Radioakt. u. Elektr. **7** (1910), S. 405 も参照せよ．——ローレンツ収縮の仮説は Lorentz および Fitzgerald により独立に提唱された．

[8] 上 **353**. Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. d. phys. **17** (1905), S. 891. Einstein の論文におけるようには，その原理的意義が明確にまた完全に認識されてはいないが，この Einstein の論文と同じような内容の 2 つの論文が，ほとんど同時に Lorentz および Poincaré によってそれぞれ発表された：H. A. Lorentz, Versl. Ak. v. Wetensch. Amsterdam **12** (1904), S. 986: H. Poincaré, Comptes rendus Paris **140** (1905), S. 1504 および Rend. Circ. Matem. di Palermo **21** (1906), S. 129. またこの方面の研究の先駆者として J. J. Larmor の名を挙げねばなるまい：Aether and matter, Cambridge 1900, S. 167–177.

[9] 上 **354**. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern,

Nachr. d. Ges. d. Wissensch. Göttingen 1908, S. 53, または Ges. Abhandlg. Bd. II, S. 352.

[10] 上 **370.** これに関しては Weyl のスペイン語による講義の第1, 第3を参照せよ.

[11] 上 **393.** 光の分散を考慮するときは, q' は振動数 ν' の光が静止している水の中を伝播するときの速さを示すものと解すべきで, 水の内部および外部における振動数 ν に対する速さではない. この結論の注意深い実験的検証は Michelson および Morley により与えられた: Americ. Journ. of Science **31** (1886), S. 377; Zeeman, Versl. d. K. Akad. v. Wetensch. Amsterdam **23** (1914), S. 245; おなじく **24** (1915), S. 18. Fizeau の方法に類似しているが Zeeman による干渉を用いた新しい実験は: Zeeman, Versl. Akad. v. Wetensch. Amsterdam **28** (1919), S. 1451; Zeeman および Snethlage, 同誌 S. 1462. 回転している物体に対する干渉法を用いた実験については Laue, Annal. d. Physik **62** (1920), S. 448.

[12] 上 **406.** Wilson, Philosoph. Transact. (A) Bd. **204** (1904), S. 121.

[13] 上 **413.** Röntgen, Sitzungsber. d. Berliner Akademie 1885, S. 195; Wied. Annalen Bd. **35** (1888), S. 264 および Bd. **40** (1890), S. 93; Eichenwald, Annalen d. Physik Bd. **11** (1903), S. 421.

[14] 上 **413.** Minkowski, 文献 [9] 参照.

[15] 上 **418.** W. Kaufmann, Nachr. d. K. Ges. der Wissensch. zu Göttingen 1902, S. 291; Ann. d. Physik Bd. **19** (1906), S. 487 および Bd. **20** (1906), S. 639; A. H. Bucherer, Ann. d. Physik Bd. **28** (1909), S. 513 およ

び Bd. **29** (1909), S. 1063; S. Ratnowsky, Détermination expérimentale de la variation d'inertie des corpuscules cathodiques en fonction de la vitesse, Dissertation, Genf 1911. E. Hupka, Ann. d. Physik Bd. **31** (1910), S. 169; G. Neumann, Ann. d. Physik Bd. **45** (1914), S. 529, および C. Schaefer による追加ノート, 同誌 Bd. **49**, S. 934. また原子論については K. Glitscher, Spektroskopischer Vergleich zwischen den Theorien des starren und des deformierbaren Elektrons, Ann. d. Physik Bd. **52** (1917), S. 608.

[16] 上 **421**. Schwarzschild, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. Göttingen 1903, S. 125. Poincaré, 文献［8］（Rend. Palermo）参照. Born, Ann. d. Phys. **28** (1909), S. 571; Weyl, Ann. d. Phys. **54** (1917), S. 118.

[17] 上 **438**. Lewis と Tolman はエネルギー・運動量の保存則を弾性衝突に適用することにより Einstein の力学の基礎づけをした： Phil. Mag. 18 (1909), S. 510. なお弾性衝突については Jüttner によりたちいった研究がおこなわれた： Zeitschr. f. Mathem. u. Physik **62** (1914), S. 410.

[18] 上 **444**. "Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig ?", Ann. d. Physik **17** (1905), S. 639. なお Ann. d. Physik **20** (1906), S. 627 および同誌 **23** (1907), S. 371 も参照せよ．さらに H. A. Lorentz, Versl. Akad. v. Wetensch. Amsterdam **20** (1911), S. 87 を参照せよ．運動している体系の力学に対する Planck の基礎的研究において，彼は熱的平衡状態にある空洞放射を議論の出発点とした： Ann. d. Phys. **76** (1908), S. 1. なお K. v. Mosengeil, Ann. d. Phys. **22** (1907), S. 867 および M.

Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. II, 2. Aufl, S. 44 も参照せよ．

[19] 上 **446.** 電磁場に対してここに列挙された保存則は，マックスウェルの法則がローレンツ変換に対して不変であるという事情にもとづく．実際 §40 で示されるように，マックスウェルの方程式はローレンツ変換をも包含する "共形変換群" に対して不変である．この不変性から導かれる保存則は E. Bessel-Hagen により与えられた：Mathem. Annalen **84** (1921), S. 258. しかしこの保存則は非常に特別な場合にかぎって物理的意味をもつものである．なぜなら電磁場が物質と相互作用しているときは，それはなりたたないから．

[20] 上 **453.** M. Abraham, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. Göttingen 1902, S. 20, および Ann. d. Phys. **10** (1903), S. 105.

[21] 上 **455.** Herglotz, Ann. d. Phys. **36** (1911), S. 453. なお流体力学に関しては Ignatowsky, Physik. Zeitschr. **12** (1911), S. 441 および Lamla, Ann. d. Phys. **37** (1912), S. 772, さらに Pauli, Relativitätstheorie, S. 693〔文献 [1]〕を参照せよ．また熱力学の文献には Planck, 文献 [18] がある．

[22] 上 **455.** Ann. d. Phys. **37**, **39**, **40** (1912/13).

第 IV 章

[1] 下 **9.** この節ばかりでなく，§39 までのすべての節に対しては A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (Leipzig, Joh. Ambr. Barth, 1916) を参照せよ．この論文については訳者による日本語訳，「アインシュタイン選集」2（共立出版）もある．さらに Über die spezielle und

die allgemeine Relativitätstheorie (gemeinsverständlich; Sammlung Vieweg, 10. Aufl., 1920) を参照せよ. このほかに相対性理論についてドイツ語で書かれた文献には以下のものがある: M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen, Springer 1920. H. Thirring, Die Idee der Relativitätstheorie, Springer 1921; E. R. Neumann, Vorlesungen zur Einführung in die Relativitätstheorie, Jena 1922; M. Laue, Die Relativitätstheorie, Bd. 1 u. 2, Vieweg 1921; W. Pauli, Enzyklopädieartikel〔第 III 章の文献 [1] を見よ〕. M. Schlick, Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik, Springer 1920; E. Cassirer, Zur Einsteinschen Relativitätstheorie, Berlin 1921; R. Carnap, Der Raum (Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre), Kant-Studien Nr. 56 (1922). Einstein, Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. **55** (1918), S. 241, 同じく Äther und Relativitätstheorie, Springer 1920. 1920 年ナウハイムで開催された自然科学者会議における相対性理論についての講演と討論: Physik. Zeitschr. **21** (1920), S. 649–675. なおこれについて Weyl, Die Relativitätstheorie auf der Naturforscherversammlung in Bad Nauheim, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig. 1922, および Nature, Vol. **106** (1921) (17. Febr, 相対性理論に関する特集号). 相対性理論に対する批判について, 特に傾聴すべきものはつぎの論文がある: P. Lenard, Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation, Leipzig 1921; P. Painlevé, Comptes rendus Paris, 1921–22 (多数の論文がある).

[2] 下 **10**. この困難は以前から力学を論理的に筋のとお

ったものとして組みたてようとするとき，既にわれわれにわかっていたことである．Newton, Leibnitz, Huygens, Euler 等々により，この問題は議論された．また最近になって E. Mach によりこの問題は最も強く議論された．これに関して L. Lange, Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffes, 1886, および A. Voss, Die Prinzipien der rationellen Mechanik, Mathematischen Enzyklopädie, Bd. IV, Art. I, Absatz 13-17 (phoronomische Grundbegriffe) にのっている詳細な参考文献を参照せよ．

[3] 下 **16**. Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn VIII (1890), S. 65.

[4] 下 **26**. 重力の理論を特殊相対性理論に適合させようとする他の試み（たとえば Abraham, Mie, Nordström 等の試み）については，つぎの文献にその概括的な説明がある：M. Abraham, Neuere Gravitationstheorien, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, Bd. XI (1915), S. 470, および Laue, 同誌 Bd. XIV (1917), S. 263. さらに Einstein u. Fokker, Ann. d. Phys. **44** (1914), S. 321.

[5] 下 **27**. 運動している物体の変形については H. A. Lorentz, Nature **106** (1921), S. 793 を見よ．また回転している座標系における空間ならびに時間の測定については F. Kottler, Phys. Zeitschr. **22** (1921), S. 274 および 480 を見よ．

[6] 下 **33**. これに関してはスペイン語で話した私の第 3 の講義または Weyl, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen (1921), S. 100 を参照せよ．

[7] 下 **40**. F. Klein, Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen

Gravitationstheorie, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. Göttingen 1918. なおこの一般的な公式化について同誌の E. Noether, Invariante Variationsprobleme を参照.

[8] 下 **51**. A. Palatini, Dedutione invariantiva delle equazioni gravitazionali del principio di Hamilton, Rend, del Circ. Matem. di Palermo t. **43** (1919), S. 203/212.

[9] 下 **53**. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. **44** (1915), S. 778. および同誌 S. 799 の追記, 同じく, Die Feldgleichungen der Gravitation, 同誌 (1915) S. 844.

[10] 下 **53**. H. A. Lorentz, Het beginsel van Hamilton in Einsteins theorie der zwaartekracht, Versl. d. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, XXIII, S. 1073; Over Einsteins theorie der zwaartekracht I, II, III, 同誌 XXIV, S. 1389, 1759; XXV, S. 468. Tresling, 同誌 Nov. 1916; Fokker, 同誌 Jan. 1917, S. 1067; Hilbert, Die Grundlagen der physik, I. Mitteilung, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1915, 2. Mitteilung 1917. この第1の報告で Hilbert は Einstein と同時に, しかし互いに独立に重力場の方程式を不変な形であたえた. しかし彼は物質に対する Mie の仮説的な理論をその基礎に用いた. さらに参考論文としては Einstein, Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie, Sittzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. **42** (1916), S. 1111. Klein, Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1918. また文献 [7] に引用された論文がある. このほかに Weyl, Zur Gravitationstheorie, Ann. d. Phys. Bd. **54** (1917), S. 117.

[11] 下 **55**. Levi-Civita, Statica Einsteiniana, Rend. della, R. Accad. dei Lincei 1917, vol. XXVI, ser. 5ª, I° sem. pag. 458.

[12] 下 **60**. Levi-Civita, La teoria di Einstein e il principio di Fermat, Nuovo Cimento, Ser. VI, vol. **16** (1918), S. 105-114.

[13] 下 **64**. F. W. Dyson, A. S. Eddington, C. Davidson, A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of May 29, 1919, Philos. Transact. of the Royal Society of London, Ser. A, Vol. **220** (1920), S. 291-333. E. Freundlich, Die Naturwissenschaften (1920), S. 667-673. なお 1922 年 9 月 21 日の皆既蝕には，さらに新しい観測が行なわれた．

[14] 下 **67**. Schwarzschild, Sittzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1914, S. 1201. Ch. E. St. John, Astrophys. Journal. **46** (1917), S. 249 (なおこの論文のなかに引用されている Halm および Adams の論文も参照せよ)．Evershed および Royds, Kodaik, Obs. Bull. **39**. L. Grebe および A. Bachem, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Ges. **21** (1919), S. 454; Zeitschr. f. Phys. **1** (1920), S. 51. L. Grebe, Zeitschr. f. Phys. **4** (1921), S. 105. A. Perot, Comptes rendus Paris **170** (1920), S. 988 および **171** (1920), S. 229; St. John, The Obervatory **43** (1920), Nr. 551; Physik. Zeitschr. **23** (1922), S. 197; Fabry および Buisson, Comptes rendus Paris **172** (1921), S. 1020; Perot, Journ. d. Physique et le Radium, Ser. 6, Bd. **3** (1922), S. 101; E. Freundlich, Physik.

Zeitschr. **20** (1919), S. 561.

[15] 下 **68**. Einstein, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1915, S. 831; Schwarzschild, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1916, S. 189.

[16] 下 **68**. H. Seeliger の仮説は最も多くの人々の注意をあつめた: Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten, Münch. Akad. Ber. **36** (1906). なお E. Freundlich, Astr. Nachr. Bd. **201** (Juni 1915), S. 48 も参照せよ. ——Newcomb により計算された 42″ という値に対する批判については, Grossmann, Astronom, Nachr. **214**, S. 41〔抜粋: Zeitschr. f. Phys. **5** (1922), S. 280〕がある. Einstein の理論を基礎とした太陽に近い惑星の運動に関するすべての定数の新しい計算については, J. Bauschinger, Enzyklopädie d. Math. Wissensch. VI 2, 17, S. 887; Kienle, Die Naturwissenschaften 1922, S. 217 および 246.

[17] 下 **71**. Einstein, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1916, S. 688; およびその補足: Über Gravitationswellen, 同誌 1918, S. 154. さらに Hilbert, 文献 [10] の第 2 論文を参照せよ.

[18] 下 **76**. Phys. Zeitschr. Bd. **19** (1918), S. 33 および S. 156; Bd. **22** (1921), S. 29; de Sitter, Planetary motion and the motion of the moon according to Einstein's theory, Amsterdam Proc. Bd. **19**, 1916. このほかに近似解についての研究に関しては, 弱い重力場内における電気力学についての W. Alexandrow の論文: Ann. d. Phys. **65** (1921), S. 675 および Physik. Zeitschr. **22** (1921), S. 593 を挙げておく.

[19] 下 **77**. Schwarzschild, 文献 [14], Hilbert, 文献 [10] の第2論文参照. さらに J. Droste, Versl. K. Akad. v. Wetensch. Amsterdam Bd. **25** (1916), S. 163.
[20] 下 **92**. H. Reissner, Ann. d. Phys. **50** (1916), S. 106; Weyl, 文献 [10]. G. Nordström, On the Energy of the Gravitation Field in Einstein's Theory, Versl. d. K. Akad. v. Wetensch. Amsterdam Bd. **20**, Nr. 9, 10 (26. Jan. 1918). C. Longo, Legge elektrostatica elementare nella Teoria di Einstein, Nuovo Cimento, Ser. VI, Vol. **15** (1918), S. 191.
[21] 下 **102**. A. S. Eddington, Report on the Relativity Theory of Gravitation (London, Fleetway Press, 1919), §§ 29, 30; L. Flamm, Physik. Zeitschr. **17** (1916), S. 448. n 体問題については, J. Droste, Versl. K. Akad. v. Wetensch. Amsterdam **25** (1916), S. 460.
[22] 下 **109**. Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1916, **18**, S. 424. H. Bauer, Kugelsymmetrische Lösungssysteme der Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation für eine ruhende, gravitierende Flüssigkeit mit linear Zustandsgleichung, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, math.——naturw. Kl., Abt. II a, Bd. **127** (1918).
[23] 下 **109**. Weyl, 文献 [10], §§ 5, 6 参照. さらにこれに対する注意: Ann. d. Phys. Bd. **59** (1919), および R. Bach の論文に対する補足としての静的二体問題に対する研究: Explizite Aufstellung statischer axialsymmetrischer Felder, Math. Zeitschr. **13** (1922), S. 134-145 も参照せよ.

[24] 下 **110-111.** Levi-Civita: ds^2 einsteiniani in campi newtoniani, Rend. Acc. dei Lincei, 1917/19.

[25] 下 **111.** 文献 [23] 参照. さらに R. Bach, Das Feld in der Umgebung eines langsam rotierenden kugelähnlichen Körpers von beliebiger Masse in 1. und 2. Annäherung, Math. Zeitschr. **13** (1922), S. 119 も見よ.

[26] 下 **112.** A. De-Zuani, Equilibrio relativo ed equazioni gravitazionali di Einstein nel caso stazionario, Nuovo Cimento, Ser. VI, Vol. **18** (1919), S. 5; A. Palatini, Moti Einsteiniani stazionari, Atti del R. Istit. Veneto di scienze, lett. ed arti, t. 78 (2) (1919), S. 589.

[27] 下 **115.** Versl. K. Akad. v. Wetensch. Amsterdam **29**, S. 611. さらに J. A. Schouten, 同誌 S. 1150 も参照せよ.

[28] 下 **126.** Einstein, Grundlagen... 〔文献 [1] 参照〕. 本文にある証明は Klein による: Klein, 文献 [7] 参照. この方程式の物理的意味については Schrödinger, Phys. Zeitschr. Bd. **19** (1918), S. 4; H. Bauer, 同誌 S. 115, および Einstein, Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. (1918), S. 448 を参照せよ. Einstein の論文はこの問題について非常に明瞭に説きあかしている. なお本書ではこの Einstein の論文に従った. このほかに F. Klein, Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich-geschlossenen Welt, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1918 も参照せよ.

[29] 下 **130.** G. Nordström, On the mass of a material system according to the Theory of Einstein, Akad. v.

Wetensch. Amsterdam, Bd. **20**, Nr. 7 (29. Dez. 1917).
[30] 下 **143**. G. Jaffé, "Ruhmasse" und "Masse der Bewegung" im statischen Gravitationsfelder, Physik. Zeitschr. Bd. **23** (1922), S. 337. Jaffé は慣性質量をスカラー $m_0/\sqrt{f^2-v^2}$ ではなく 3 次元空間テンソル $m_0\gamma_{ik}/\sqrt{f^2-v^2}$ によってあらわした.
[31] 下 **153**. Ann. d. Physik Bd. **39** (1913).
[32] 下 **155**. Oseen の証明 (Physik. Zeitschr. **16** (1915), S. 395) においては, マックスウェルの方程式の場合と同様に, 賦与された境界条件が重要である. なお G. Mie, Physik. Zeitschr. **21** (1920), S. 657 および S. R. Milner, Phil. Mag. **41** (1921), S. 405 も参照せよ.
[33] 下 **157**. Weyl, Über das Verhältnis der kausalen zur statistischen Betrachtungsweise in der Physik, Schweiz. Medizin. Wochenschrift 1920, Nr. 34; および Feld und Materie, Ann. d. Physik, **65** (1921), S. 541. W. Schottky, Das Kausalproblem der Quantentheorie als eine Grundfrage der modernen Naturforschung überhaupt, Die Naturwissenschaften **9** (1921). W. Nernst, Zum Gültigkeitsbereich der Naturgesetze, 同誌 Bd. **10** (1922).
[34] 下 **164**. Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1917, S. 142.
[35] 下 **168**. Weyl, Physik. Zeitschr. **20** (1919), S. 31.
[36] 下 **169**. A. S. Eddington, Stellar Movements and the Structure of the Universe, Macmillan & Co. 1914.
[37] 下 **170**. On the Relativity of Inertia, Versl. d. Akad. v. Wetensch. Amsterdam **19** (1917); On the curvature of Space, 同誌 **20** (1918); On Einstein's Theory of Gravi-

tation and its Astronomical Consequences, Third paper, Monthly Notices of the R. Astronom. Soc. London, Nov. 1917. なお F. Klein, 文献［27］も参照せよ.

[38] 下 **180**. Einstein, Äther und Relativitätstheorie (Leidener Vorlesung), Springer 1920. なお "Übermacht des Äthers" については E. Wiechert の詳論: Der Äther im Weltbild der Physik, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1921, S. 29, および Vierteljahrsschr. d. Astron. Gesellsch. **56** (1921), S. 171 を参照せよ.

[39] 下 **184**. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 3. Aufl. Braunschweig 1922.

[40] 下 **187**. つぎの二つの節に述べられている理論は Weyl により提唱され展開されたものである: Weyl, "Gravitation und Elektrizität", Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1918, S. 465. さらに Weyl, Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, Ann. d. Physik, Bd. **59** (1919). E. Reichenbächer の論文（しかしその本質的な点が私には理解できない）: Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und Gravitation, Ann. d. Physik, Bd. **52** (1917), S. 135, および Ann. d. Physik Bd. **63** (1920), S. 93-144 にもおなじような傾向がみられる. 電気と重力を統一しようとする試みについてこのほかには, 文献［4］にでてきた Abraham の論文や, G. Nordström, Physik. Zeitschr. **15** (1914), S. 504; E. Wiechert, Die Gravitation als elektrodynamische Erscheinung, Ann. d. Physik, Bd. **63** (1920), S. 301 を参照せよ.

[41] 下 **192**. Ehrenfest, Welche Rolle spielt die Dreidimensionalität des Raumes in dem Grundgesetzen der

Physik? Ann. d. Physik, **61** (1920), S. 440.

[42] 下 **194.** E. Cunningham, Proc. of the London Mathem. Society, (2) vol. 8 (1910), S. 77-98; H. Bateman, 同誌 S. 223-264.

[43] 下 **194.** この法則は Liouville により証明された: G. Monge, Application de l'analyse à la géométrie (1850), S. 609 の付録にある Note VI 参照.

[44] 下 **195.** W. Pauli, Zur Theorie der Gravitation und der Elektrizität von H. Weyl, Physik. Zeitschr. Bd. **20** (1919), S. 457-467; Weyl, Über die physikalischen Grundlagen der erweiterten Relativitätstheorie, Physik. Zeitschr. **22** (1921), S. 473. Einstein も彼の重力場の方程式を再度，修正することにより部分的に同様の結果をみちびいた: Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1919, S. 349-356.

[45] 下 **225.** Über die Wirkungsfunktion in der Weylschen physik, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, Abt. II a, **129** および **130** (1920/21). さらに K. Akad. v. Wetensch. Amsterdam **25** (27. Mai 1922).

[46] 下 **225.** Math. Zeitschr. **9** (1921), S. 110-135, 特に S. 125 および 128 を参照せよ.

[47] 下 **225.** Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. **21** (1919), S. 742.

[48] 下 **226.** Proceedings of the Royal Society, A, **99** (1921), S. 104-122.

[49] 下 **249.** R. Bach, 文献 [46], S. 128-135 を参照せよ. さらに A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d.

Wissensch. 1921, S. 261-264 も見よ.
[50] 下 **249**. Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1921, S. 966.

解説　アインシュタインの論文からわずか2年後に刊行されたワイルの原著

細谷暁夫

現代の素粒子の相互作用に関する標準理論は，ゲージ原理に基づいています．ゲージとは普通には物差しのことですから，素粒子理論における対称性とは用語的に合っていない気がしていたのは，私だけではありますまい．この「ゲージ」の言葉の由来が本書の著者のH. ワイルにあると，教えてくださったのは，訳者の内山龍雄先生でした．

ワイルは，本書の最終章で，彼自身の研究に基づいて重力と電磁力を統一する理論を展開しています．そこでは，長さの縮尺を局所的に変える変換に対して不変な理論を，ベクトル場を導入して構成しています．彼はそれを電磁場と同定しましたが，物理としては成功しませんでした．それにも関わらず，局所的な変換をゲージ変換と一般に呼ぶことになったのです．今日では，彼の考えた局所的な縮尺変換はワイル変換と呼ばれ，共形場の理論，量子異常の理論などで登場します．相対論分野の人は同じものを共形変換と呼んでいて，それは時空の大局的構造を見るのに不可欠です．

内山先生ご自身は，半世紀前の1956年に，ゲージ原理に基づく素粒子の相互作用に関する一般論をヤンとミルズによるより限定された仕事と独立に発表されました．(R. Utiyama, Phys. Rev. 101, 1597 (1956)) またその原理によって一般相対性理論も理解できることを示しました．今日の統一理論の思想的な枠組みの先触れとも言える論文です．このあとに，少し詳しく紹介しますが，ワイルによるこの本の主な内容が一般相対性理論であることを考えると，内山先生はこの本から多くの影響を受けていたと思われます．この訳本のもとになっているのは第5版（1922年）ですが，原著の第1版が，ワイル自身がスイスのチューリッヒ工科大学でアインシュタインの同僚であったことを考えに入れても，一般相対性理論完成からわずか2年後の1918年に，作用原理による数学的に整備された形で出版されたことに驚きます．物質を場としてあつかう，以後の理論物理学の方向性に多くの影響を与えたに違いありません．不変変分論を得意とした内山先生もそのひとりでした．

この本の内容を簡単に紹介しましょう．第1章はテンソル代数などの数学の基礎的なこと，第2章でリーマン幾何学，第3章が特殊相対性理論と電磁気学，第4章が一般相対性理論とシンプルな構造をしています．第2章を除いて，数学的な一般論から物理学的記述へと進んでいます．たとえば，第1章では「ユークリッド空間：数学的定式化と物理学における役割」と題して，線形代数から始まって，コマの力学とマクスウェルの電磁気学で終わっています．第2

章「距離連続体」では非ユークリッド幾何学について，その歴史から説き起こしてリーマン幾何学まで述べています．「実用的な」相対性理論の教科書では端折られているロバチェフスキー幾何学などについても触れています．しかしながら，3次元多様体の分類に関するサーストン予想がペレルマンによって証明された現代であれば，計量空間の群論的な見方を述べた最終節と相まって，かえって現代的な微分幾何学の記述と言えるかもしれません．第3章はニュートン力学におけるガリレイの相対性原理からはじめて，質量とエネルギーまで述べています．ここではすでに，アインシュタインの原論文のものではなく，現代的な特殊相対性理論の教科書のスタイルになっています．最終節が，今ではあまり聞かない電子の内部に関するミーの理論を紹介していますが歴史的なものと考えればよいでしょう．第4章の一般相対性理論は作用原理に基づく書き方でほとんど現代的なものです．内山先生自身も訳者序で述べておられますが，近日点移動の簡潔な導出は見事です．最終節に，上記の「ゲージ場」が登場します．理論物理学に強く惹かれていたとしても，ワイルは基本的に数学者ですから，観測・実験的な記述が少ないことは，やむを得ないことです．しかし，どこかで，ワイルの言った冗談「私は，真と美を統一するように仕事をしてきたが，真か美かどちらかを取れと言われたら，美を取るよ」(Wikipedia) が頭の隅をよぎります．訳者序で，内山先生が相対性理論の美しさを，1972年当時の「泥臭い」素粒子論と比較している点，先生

はワイルと同じ考えをお持ちであったような気がします．実は，現在の素粒子理論，特に超弦理論は十分ワイル的とも思えるのですが，弦理論がお嫌いだった先生はどう思われるでしょうか？

美しい数学的なスタイルの他に，この本にはもう一つ特徴があります．ワイル自身も緒論に述べていますように，数学的に定義した量が客観的に意味のある量であるかどうかを哲学的にも吟味しつつ，理論を展開していることです．目的の一つは，半可通の哲学者が相対性理論について誤った考えを流布させていることに対抗するためなのかも知れません．特に緒論でそれが顕著ですが，折に触れて出てきます．しかしながら，この訳書では割愛されている第１版の序で彼自身も告白しているように，必ずしも成功しているとは言えません．理由は多分，古典論においては，哲学的考察をするまでもなく数学的記述だけで概念が十分明確であるためでしょう．例えば，ゲージ理論と相対性理論においては観測可能量とゲージ不変量はほぼ同義です．その証拠に，ワイル以後現在にいたるまで，相対性理論の教科書には，この本の初めの方にあるような哲学的記述はほとんどありません．内山先生は，この名著を難解であると述べておられます．はじめて相対性理論を学ぶ人にとっては確かにそうでしょうが，すでに一応マスターした人にとっては，論理的に整理されている分，受け入れやすいのではないでしょうか？　難解なところはその中にあるごくわずかな哲学的な記述であり，飛ばして読んでもいいような気

もしてきます.

しかしながら，この本では末尾に一行だけ言及されている，20 世紀における物理学のもう一つの金字塔である量子力学を考えると大分違ってくると思います．量子力学と相対性理論との融合である量子重力のあるべき姿を展望すると，客観的に意味のある量とは何かという問題を正面から取り上げる必要があるように思います．ただし，ワイルが展開しているドイツ観念論の影響を色濃く受けた哲学的考察が有効であるのかは疑問です．空間・時間は実在ではなく先験的形式であるというカントの有名な言葉を引用されても，問題点の切り捨てでしかなく，来るべき新理論のヒントになりそうにありません．絶対的な客観性を問うよりは，実験結果を他者にコミュニケーションすることが可能な量は何かが重要になってきます．それが絶対空間を否定した相対性理論の精神に合っているように思います．いわゆる物理的実在についてワイルの言っていることは留保が多く，少なくとも私には真意が汲み取れませんでした．私は 1905 年のアインシュタインの特殊相対論の原論文にある，時計を光の交信によって合わせる方法によりローレンツ変換を導くという認識論的かつ操作主義的なアプローチが必要になると思います．ワイル自身は時計や剛体なる物は最終的には理論から取り外せると述べていますが，それは古典論に限るのではないでしょうか？

今，内山先生にこの話をしたらどう言われるでしょうか？あるとき，道を歩きながら，内山先生は「俺は相対論の研

究者ではあるが，絶対空間の方が好きなのだよ」とおっしゃいました．「どの慣性系も同等などという，いい加減なことがあっていいものだろうか？」先生の民主主義嫌いを知っておりましたので，その時は思わず笑ってしまいましたが，今にして思えば，観測者をも物理過程に取り込んで「観測している俺の空間」を設定する可能性を考えておられたのかも知れません．

この歴史的な名著が，相対性理論を透徹して理解しておられた内山先生の堂々たる日本語で翻訳されたこと自体重要なことと考えます．今回，筑摩書房のご努力によって，今まで手に入りにくかったこの訳書が多くの人の手に届くことは，まことに喜ばしいことだと思います．

2007年3月　大岡山にて

事項索引

タ

ワ

人名索引

本書は、一九七三年六月二十八日、講談社より刊行された。

マッハ力学史（上）　エルンスト・マッハ　岩野秀明訳

古典力学はどこまで科学的か？　反形而上学的立場からの根源的検証。アインシュタインの相対性理論を胚胎していた、ニュートン力学批判の古典。

マッハ力学史（下）　エルンスト・マッハ　岩野秀明訳

時代を魅了したマッハ哲学の魅力とは？　思惟経済説とは？　科学が哲学を凌駕し始めた世紀の、古典力学を通して考察された認識論。上・下巻。

位相のこころ　森毅

微分積分などでおなじみの極限や連続などは、20世紀数学でどのように厳密に基礎づけられたのか。「どんどん」近づける構造のしくみを探る。

現代の古典解析　森毅

おなじみ一刀斎の秘伝公開！　極限と連続に始まり、指数関数と三角関数を経て、偏微分方程式に至る。見晴らしのきく、読み切り22講義。

角の三等分　矢野健太郎　一松信解説

コンパスと定規だけで角の三等分は「不可能」！　なぜ？　古代ギリシアの作図問題の核心を平明懇切に解説し「ガロア理論入門」の高みへと誘う。

思想の中の数学的構造　山下正男

レヴィ＝ストロースと群論？　ニーチェやオルテガの遠近法主義、ヘーゲルと解析学、孟子と関数概念……。数学的アプローチによる比較思想史。

新版　電子と原子核の発見　S・ワインバーグ　本間三郎訳

電子の発見に始まる20世紀素粒子物理学の考え方と実験を、具体的にわかりやすく解説したノーベル賞学者による定評ある入門書。写真・図版多数。

一般相対性理論　P・A・M・ディラック　江沢洋訳

一般相対性理論の核心に最短距離で到達すべく、卓抜した数学的記述で簡明直截に書かれた天才ディラックによる入門書。詳細な解説を付す。

不完全性定理　野﨑昭弘

事実・推論・証明…。理屈っぽいとケムたがられる話題を、なるほどと納得させながら、ユーモアたっぷりにひもといたゲーデルへの超入門書。

数学的センス　野﨑昭弘

美しい数学とは詩なのです。いまさら数学者にはなれないけれどそれを楽しめたら…。そんな期待に応えてくれる心やさしいエッセイ風数学再入門。

幾何学基礎論　D・ヒルベルト　中村幸四郎訳

20世紀数学全般の公理化への出発点となった記念碑的著作。ユークリッド幾何学を根源まで遡り、斬新な観点から厳密に基礎づける。　（佐々木力）

数のエッセイ　一松信

完全数、友愛数やπのコンピュータ数値計算などからタイル張りまで。エスプリのきいた語り口でエレガントな世界に誘う異色の数学エッセイ。

ブルバキ数学史(上)　ニコラ・ブルバキ　村田全／清水達雄／杉浦光夫訳

ブルバキ数学史(下)　ニコラ・ブルバキ　村田全／清水達雄／杉浦光夫訳

「構造」の観点から20世紀の数学全体を基礎づけ直したブルバキの理念を、凝縮した形で通覧できる異色の数学史。3篇を増補した決定版文庫。上下巻。

数学の各理論の指導的理念や展開過程を、膨大な史料原典を駆使して、背後にある思考様式や哲学を含め考察。「構造主義」哲学の重要な文献。

素粒子と物理法則　R・P・ファインマン／S・ワインバーグ　小林澈郎訳

量子論と相対論を結びつけるディラックのテーマを対照的に展開したノーベル賞学者による追悼記念講演。現代物理学の本質を堪能させる三重奏。

πの歴史　ペートル・ベックマン　田尾陽一／清水韶光訳

円周率だけでなく意外なところに顔をだすπ。ユークリッドやアルキメデスによる探究の歴史に始まり、オイラーの発見したπの不思議にいたる。

ユダヤ戦記3　フラウィウス・ヨセフス　秦剛平訳

ユダヤ人の聖性が宿る都エルサレムと神殿を失ったのに、彼らの神は沈黙を守る。そして二〇〇〇年にわたる流浪が始まった。全三巻完結。

新訂 都名所図会（全5巻・分売不可）　市古夏生　鈴木健一　校訂

一七八〇年に刊行された京都名所案内。俳諧師秋里籬島文。写生による鳥瞰図風の多数の精密画が大評判となり、名所図会ものの嚆矢となった。

フェルマーの大定理　足立恒雄

ついに証明されたフェルマーの大定理。その美しき頂への峻厳な道のりを、クンマーや日本人数学者の貢献を織り込みつつ解き明かした整数論史。

$\sqrt{2}$の不思議　足立恒雄

$\sqrt{2}$とは？　見えてはいるけれどないもの。ないようであるもの。納得しがたいその深淵に、ギリシア人は慄いた。抽象思考の不思議をひもとく！

偉大な数学者たち　岩田義一

君たちに数学者たちの狂熱を見せてあげよう！　ガウス、オイラー、アーベル、ガロア……。少年たちに数学への夢をかきたてた名著の復刊。（高瀬正仁）

算法少女　遠藤寛子

父から和算を学ぶ町娘あきは、算額に誤りを見つけ声を上げた。と、若侍が…。和算への誘いとして定評の少年少女向け歴史小説。箕田源二郎・絵

数学史入門　佐々木力

古代ギリシャやアラビアに発する微分積分学のダイナミックな形成過程を丹念に跡づけ、数学史の醍醐味をわかりやすく伝える書き下ろし入門書。

宇宙をかき乱すべきか(上)　F・ダイソン　鎮目恭夫訳

若くして相対性理論と量子力学を統合する方程式を発見した物理学の巨人の自伝。芸術、宗教、哲学を含みこんだ壮大なヴィジョンが展開する。

宇宙をかき乱すべきか(下)　F・ダイソン　鎮目恭夫訳

ファインマン、オッペンハイマー等との交流。ヒトという種の未来を宇宙論的視野から考察した人間と[illegible]

ユダヤ古代誌（全6巻）
フラウィウス・ヨセフス
秦剛平訳
こす、天地創造からイエスの時代をへて同時代（紀元後一世紀）までのユダヤの歴史。

ユダヤ古代誌1
フラウィウス・ヨセフス
秦剛平訳
天地創造から始祖アブラハムの事蹟へ、イサク、ヤコブ、ヨセフの物語から偉大な指導者モーセのカナン到着までを語る、旧約時代篇の冒頭巻。

ユダヤ古代誌2
フラウィウス・ヨセフス
秦剛平訳
カナン征服から、サムソン、ルツ、サムエルの物語を追い、サウルによるユダヤ王国の誕生、ダビデ、ソロモンの黄金時代を叙述して歴史時代へ。

ユダヤ古代誌3
フラウィウス・ヨセフス
秦剛平訳
ソロモンの時代が終わり、ユダヤ王国は分裂する。バビロン捕囚によって王国が終焉するまでの歴史を一望し、アレクサンダー大王の時代に至る。

ユダヤ古代誌4
フラウィウス・ヨセフス
秦剛平訳
アレクサンドリアにおける聖書の翻訳から、マッカバイオス戦争を経て、アサモナイオス朝の終焉までのヘレニズム時代。新約世界のはじまり。

ユダヤ古代誌5
フラウィウス・ヨセフス
秦剛平訳
ヘロデによる権力確立（前三七－二五年）から、その全盛時代（前二五－一三年）を経て、彼の死後の混乱、イエス生誕のころまでを描く。

ユダヤ古代誌6
フラウィウス・ヨセフス
秦剛平訳
ユダヤがローマの属州となった後六年からアグリッパス一世の支配（後四一－四四年）を経て、第一次ユダヤ戦争勃発（後六六年）までの最終巻。

ユダヤ戦記1（全3巻）
フラウィウス・ヨセフス
秦剛平訳
パレスチナを舞台とし、ローマ帝国を相手にしたユダヤ戦争（紀元六六－七〇年）の狂気と無謀の詳細な記録。第一巻は戦いにいたるまでの経緯。

ユダヤ戦記2
フラウィウス・ヨセフス
秦剛平訳
圧倒的な軍事力のローマ軍。ウェスパシアノスのガリラヤ侵攻、ヨタパタの攻防戦でヨセフスが捕虜となり、ユダヤの民の不安と絶望の日々が続く。

ドーキンス vs. グールド　キム・ステルレルニー　狩野秀之訳
「利己的な遺伝子」か「断続平衡説」か？ 両者の視点を公正かつ徹底的に検証して、生物進化における大論争に決着をつける。（新妻昭夫）

不思議の国の論理学　ルイス・キャロル　柳瀬尚紀編訳
アナグラム、暗号、初等幾何や論理ゲームなど、キャロルの諸作品から精選したパズル集。華麗な〝本や苦〟離れ技をご堪能あれ。（佐倉統）

偶然の本質　アーサー・ケストラー　村上陽一郎訳
科学の分野では理論的可能性にタブーは無用との立場から、超感覚的知覚に関する様々な事例を検証して科学的思考を立体的に浮かび上がらせる。

わが世界観　E・シュレーディンガー　橋本芳契監修　中村量空ほか訳
自己の意識には、他者と普遍的に共有する領域がある——。二十世紀を代表する天才物理学者が、古代インド哲学の影響を受けたその思想を語る。

自己創出する生命　中村桂子
原核生物から人間まで、生命の普遍と多様を見て初めて生きるとは何かが分ってくる。「生命誌」提唱の原点と言える書。毎日出版文化賞受賞作。

宇宙船地球号　操縦マニュアル　バックミンスター・フラー　芹沢高志訳
地球をひとつの宇宙船として捉えた全地球主義的思考宣言の書。発想の大転換を刺激的に迫り、エコロジー・ムーブメントの原点となった。

ペンローズの〈量子脳〉理論　ロジャー・ペンローズ　竹内薫／茂木健一郎訳・解説
心と意識の成り立ちを最終的に説明するのは、人工知能ではなく、〈量子脳〉理論だ！ 天才物理学者ペンローズのスリリングな論争の現場。

異説　数学者列伝　森毅
ピタゴラスからノイマンまで、数学の歴史をつくった大家30人。悲劇的で喜劇的な数学者の〈人間〉にフォーカスした異色の列伝。（長岡亮介）

クオリア入門　茂木健一郎
〈心〉を支えるクオリアとは何か。ニューロンの発火から意識が生まれるまでの過程の解明に挑む。心

虜人日記 小松真一

グルでの逃亡生活と収容所での捕虜体験。戦争の真実、人間の本性とは何なのか。（山本七平）

中国の赤い星 上・下 エドガー・スノー 松岡洋子訳

若き日の毛沢東に率いられた紅軍と四カ月間生活を共にしたジャーナリストが共感をもって描く、二〇世紀革命中国の草創期の姿。

八月の砲声（上） バーバラ・W・タックマン 山室まりや訳

一九一四年、ある暗殺が欧州に戦火を呼びこむ。情報の混乱、指導者たちの誤算と過信は予期せぬ世界大戦を惹起した。ピュリツァー賞受賞の名著。

八月の砲声（下） バーバラ・W・タックマン 山室まりや訳

なぜ世界は戦争の泥沼に沈んだのか。政治と外交と軍事で何がどう決定され、また決定されなかったのかを克明に描く異色の戦争ノンフィクション。

戦争の記憶 イアン・ブルマ 石井信平訳

日本とドイツは第二次世界大戦を国家と国民のレベルでどう総括したのか。冷静な視座から取材と考察を進めた内外で定評ある名著。（保阪正康）

北一輝 渡辺京二

明治天皇制国家を批判し、のち二・二六事件に連座して刑死した日本最大の政治思想家北一輝の生涯。毎日出版文化賞受賞の名著。（臼井隆一郎）

増補 ケインズとハイエク 間宮陽介

真の自由主義とは何か。20世紀を代表する思想家が突き当たった「自由」の探求を通して、二人の思想の本質を明らかにする。新たに補論を増補。

マレー諸島 上・下 A・R・ウォーレス 新妻昭夫訳

「ウォーレス線」に名を残すウォーレスが見た熱帯の島々の人間と自然。一九世紀の紀行文の傑作が詳細な訳注と資料を併載した新訳でよみがえる。

人間の本性について E・O・ウィルソン 岸由二訳

美を感じ、神を信じるのも遺伝子の仕業だとしたら、我々の心とはいったい何なのか。世界中を震撼させた社会生物学の記念碑的著作。（新妻昭夫）

プルタルコス英雄伝　上・中・下
プルタルコス
村川堅太郎編

デルフォイの最高神官、故国の栄光を懐かしみつつローマの平和を享受した〝最後のギリシア人〟プルタルコスが生き生きと描く英雄たちの姿。

ギルガメシュ叙事詩
矢島文夫訳

ニネベ出土の粘土書板に初期楔形文字で記された英雄ギルガメシュの波乱万丈の物語。「イシュタルの冥界下り」を併録。最古の文学の初の邦訳。

朝鮮民族を読み解く
古田博司

彼らに共通する思考行動様式とは何か。なぜ日本人はそれに違和感を覚えるのか。体験から説き明かす朝鮮文化理解のための入門書。（木村幹）

地中海歴史回廊
牟田口義郎

地中海沿岸地域は、「人類の歴史」というドラマが展開された壮大な舞台でもある。半世紀におよぶ体験をもとに綴られたエッセー集。文庫オリジナル。

「戦艦大和」と戦後
吉田満
保阪正康編

栄光と悲惨の歴史的ドキュメント「戦艦大和ノ最期」と、日本という国のあり方、日本人の生き方を考える珠玉のエッセーを集成。（保阪正康）

カタロニア讃歌
ジョージ・オーウェル
橋口稔訳

内戦下のスペインへやってきたオーウェルは、燃えさかる革命的状況に魅せられていく。ファシストと闘った体験に基づく傑作ノンフィクション。

アラビア・ノート
片倉もとこ

定住を頽廃と観ずる「移動哲学」とは。沙漠の民の中にとびこんで、厳しい自然と戦いながら生きる人々の考え方を掘り下げたアラブ文化論の名著。

ニッポン日記
マーク・ゲイン
井本威夫訳

天皇の人間宣言、新憲法発布、食糧メーデー……。敗戦直後の混乱と激動の現場に立ち会った特派記者の眼が捉えた日本占領の実態。（中野好夫）

クワイ河収容所
アーネスト・ゴードン
斎藤和明訳

「戦場に架ける橋」の舞台となったタイ・クワイ河流域の日本軍俘虜収容所での苛酷な経験を綴った、

日本の教師に伝えたいこと　大村はま

に満ちた授業とは。実り多い学習のために、すべての教育者に贈る実践の書。（苅谷剛彦）

教師のためのからだとことば考　竹内敏晴

ことばが沈黙するとき、からだが語り始める。キレる子どもたちと教員の心身状況を見つめ、からだと心の内的調和を探る。（芹沢俊介）

異文化としての子ども　本田和子

既成の児童観から自由な立場で、私たち大人を挑発する子どもたちの世界を探訪し、その存在の異人性・他者性を浮き彫りにする。（川本三郎）

ケルト妖精学　井村君江

妖精たちは、民間伝承や文学作品にどのように登場し表現されてきたか。妖精像の変容を神話学、民俗学、比較文学の視点から興味深く紹介する。

中国説話文学とその背景　志村五郎

世界的数学者が心惹かれた中国古典説話を新訳・新釈し、読者と新鮮な驚きと感動を頒ち合おうと書いた「蒐集物語」。書き下し文庫オリジナル。

日本とアジア　竹内好

西欧化だけが日本の近代化の道だったのか。魯迅を敬愛する思想家が、日本の近代化、中国観・アジア観を鋭く問い直した評論集。（加藤祐三）

文学と悪　ジョルジュ・バタイユ　山本功訳

文学にとって至高のものとは、悪の極限を掘りあてることではないのか。サド、プルースト、カフカなど八人の作家を巡る論考。（吉本隆明）

ホメーロスの諸神讃歌　ホメーロス　沓掛良彦訳

ホメーロスの名で伝存される全33篇の叙事詩を全訳し、詳細な註と解説を付す画期的な試み。古代ギリシア文学、神話学、宗教学の一大宝庫。

漢文の話　吉川幸次郎

日本人の教養に深く根ざす漢文を歴史的に説き起こし、その由来、美しさ、読む心得や特徴を平明に解説する。贅沢で最良の入門書。（興膳宏）

歴史的決断(下)　K・R・グリーンフィールド編　中野五郎訳

グランド・ストラテジーを考えるための必読の世界的名著。下巻はノルマンディー進攻決断・日本本土進攻ルート決断など。(保阪正康)

魔術と錬金術　澤井繁男

認識の一つの型としての魔術は自然を有機的統一体と見、大宇宙と小宇宙の照応を信じた自然哲学者の壮大な宇宙観だった。近代知の脱構築。(神谷光信)

聖王ルイ　ジャン・ド・ジョワンヴィル　伊藤敏樹訳

第七回十字軍遠征記を軸に、地中海世界を介してイスラム圏やモンゴルと対峙しつつ祖国フランスの存立基盤を模索する「聖王」ルイ九世伝。本邦初訳。

パンとぶどう酒の中世　堀越孝一

高騰するワイン、ジャンヌ・ダルクの噂、セーヌ河の氾濫……15世紀の『パリの住人の日記』が浮き彫りにする中世パリの庶民の歴史。

都市　増田四郎

「都市」という現象を世界史的な視野から概観し、西欧と日本・中国の市民意識の本質的な相違を解明した比較文化論の名著。(阿部謹也)

アラブが見た十字軍　アミン・マアルーフ　牟田口義郎/新川雅子訳

十字軍とはアラブにとって何だったのか? 豊富な史料を渉猟し、激動の12・13世紀をあざやかに、しかも手際よくまとめた反十字軍史。

世界史の流れ　レーオポルト・フォン・ランケ　村岡哲訳

革命の時代にあって危機にさらされた君主制。その問題意識に応えて、ローマ帝国の興亡から同時代までを論じた実証主義的史学講義。(佐藤真一)

宗教は国家を超えられるか　阿満利麿

近代日本はどのような文化的枠組みで国民の「臣民化」をはかったのか。その構造と実態を、宗教との関わりを通して明らかにする。(西谷修)

法然の衝撃　阿満利麿

法然こそ日本仏教を代表する巨人であり、ラディカルな革命家だった。鎮魂慰霊を超えて救済の原理を

鉄砲と日本人　鈴木眞哉

[illegible]
代の鉄砲軽視など、これまで流布された通説を豊富な資料と痛快なまでの論理で次々と覆す。

江戸巷談 藤岡屋ばなし　鈴木棠三

幕末の珍談・奇談の宝庫にして世相・風俗・政治情報の貴重な記録『藤岡屋日記』から選り抜いたおもしろく不思議な話の数々。（吉原健一郎）

江戸巷談 藤岡屋ばなし 続集　鈴木棠三

江戸の情報はみな藤岡屋の手に集まる。彼の日記を飾るニュースから、世の流行、奇怪な噂、無惨な事件、金と色、政治の裏事情など浮世噺一四〇話。

性愛の日本中世　田中貴子

稚児を愛した僧侶、「愛法」を求めて稲荷山にもうでる貴族の姫君。中世の性愛信仰・説話を介して、日本のエロスの歴史を覗く。（川村邦光）

二・二六事件とその時代　筒井清忠

近代日本史上最大のクーデター二・二六事件。この事件の背後にあった陸軍の派閥抗争の内実を明らかにし、昭和史最大の謎を初めて本格的に解明。

安政江戸地震　野口武彦

巨大災害は政治と社会に内在するひずみを一気に顕在化させる。江戸の地殻に走った亀裂が政権瓦解を呼んだ歴史のうねりを臨場感溢れる筆致で描く。

古代の朱　松田壽男

古代の赤色顔料、丹砂。地名から産地を探ると同時に古代史が浮き彫りにされる。標題論考に、「即身佛の秘密」、自叙伝「学問と私」を併録。

中世賤民の宇宙　阿部謹也

西洋中世の身分差別と賤視の問題に正面から取り組んだ著作。畏怖が賤視に変わる過程を考察、中世の人々の心的構造の核に迫る。（大黒俊二）

歴史的決断(上)　K・R・グリーンフィールド編　中野五郎訳

第二次世界大戦の戦局を決定した20の統帥決断を、厖大な資料により事実のみに語らせ明らかにする。上巻はヒトラーの進攻決断・日本の開戦決断など。

自分を知るための 哲学入門　竹田青嗣

哲学とはよく生きるためのアートなのだ！　その読みどころを極めて親切に、とても大胆に元気に考えた、斬新な入門書。哲学がはじめてわかる！

時間論　中島義道

「過ぎ去ったもの」と捉えられて初めて、〈現在〉は成立している。無意識的な現在中心主義に疑義を唱える新しい時間論。オリジナル書下ろし！

カントの法論　中島義道

「身体」「他者」「法」という、従来のカント理解では周辺的なものと見られてきた概念の検討を通して、カント哲学の新たなイメージを指し示す。

思考の用語辞典　中山元

今日を生きる思考を鍛えるための用語集。時代の変遷とともに永い眠りから覚め、新しい意味をになって冒険の旅に出る哲学概念100の物語。

実存からの冒険　西研

ポスト・モダンの虚脱感にもめげず、〈充実した生〉を生きる可能性を、ニーチェとハイデガーに探る、若者のための哲学決定版。（川本隆史）

哲学的思考　西研

フッサール現象学を徹底的に読みなおし、その核心である〈実存的世界〉と〈客観的世界〉とのつながりを解明。考えあうことの希望を提起。（渡邊二郎）

現象学と解釈学　新田義弘

知の絶対化を伴う現象学と知の相対化を伴う解釈学が出合ったとき何が起きたか。現象学と解釈学の邂逅と離別の知的刺激に満ちた深層分析の書。（谷徹）

ウィトゲンシュタイン『論理哲学論考』を読む　野矢茂樹

二〇世紀哲学を決定的づけた『論考』を、きっちりと理解しその生き生きとした声を聞く。真に読みたい人のための傑作読本。増補決定版。

増補 科学の解釈学　野家啓一

「知のヒエラルキー」を解体し、科学哲学に「科学的理性批判」という本来の哲学的課題を担わせ、現代の哲学状況に切り結ぶスリリングな論考。

知の構築とその呪縛　大森荘蔵

西欧近代の科学革命を精査することによって二元論による世界の死物化という近代科学の陥穽を克服する方途を探る。（野家啓一）

トクヴィル　小山勉

自由か平等か？　フランス革命がおのずと孕んでしまう専制体質をいち早く批判し、アメリカに民主主義の実現を見た、トクヴィルの思想の全貌。

ヘーゲルの精神現象学　金子武蔵

ヘーゲルの主著『精神現象学』の完訳を果たした著者による平易な入門書。晦渋・難解な本文に分け入り、ヘーゲル哲学の全貌を一望する。（小倉志祥）

あいだ　木村敏

自己と環境との出会いの原理である共通感覚「あいだ」。その構造をゲシュタルトクライス理論および西田哲学を参照しつつ論じる好著。（谷徹）

自己・あいだ・時間　木村敏

間主観性の病態である分裂病に「時間」の要素を導入し、現象学的思索を展開する。精神病理学者である著者の代表的論考を収録。（野家啓一）

現代思想としてのギリシア哲学　古東哲明

西洋文化の源泉・ギリシア哲学は、現代に似た状況から発祥していた。存在神秘に覚醒したその思想を再検討し、現代思想を鍛え直す。（永井均）

21世紀のマルクス主義　佐々木力

危機にあるマルクス主義の理論と運動を総点検し、東アジアの民主的共生の思想的基盤を問うなか、希望としてのコミュニズムを提唱する。文庫書下し。

現代思想の冒険　竹田青嗣

「裸の王様」を見破る力、これこそが本当の思想だ！　この観点から現代思想の流れを大胆に整理し、明快に解読したスリリングな入門書。

意味とエロス　竹田青嗣

現象学の可能性を推し進めることのなかにこそ、現代思想の混迷を突破する道がある！　思考の力と歓びにあふれた哲学的デビュー作。（西研）

ちくま学芸文庫

空間・時間・物質 下

二〇〇七年四月十日　第一刷発行

著者　ヘルマン・ワイル
訳者　内山龍雄（うちやま・りょうゆう）
発行者　菊池明郎
発行所　株式会社　筑摩書房
東京都台東区蔵前二―五―三　〒一一一―八七五五
振替〇〇一六〇―八―四一二三
装幀者　安野光雅
印刷所　大日本法令印刷株式会社
製本所　株式会社鈴木製本所

乱丁・落丁本の場合は、左記宛に御送付下さい。
送料小社負担でお取り替えいたします。
ご注文・お問い合わせも左記へお願いします。
筑摩書房サービスセンター
埼玉県さいたま市北区櫛引町二―六〇四　〒三三一―八五〇七
電話番号　〇四八―六五一―〇〇五三

ISBN978-4-480-09062-1　C0142